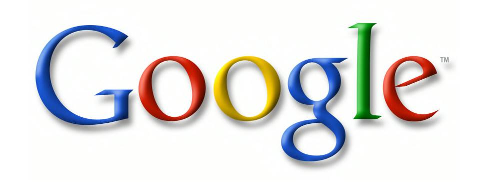



Hosted by Google

LA DUALITÉ ET L'HOMOGRAPHIE

DANS

LE TRIANGLE ET LE TÉTRAÈDRE,

PAR

L. RIPERT,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
COMMANDANT DU GÉNIE EN RETRAITE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1898

LA DUALITÉ ET L'HOMOGRAPHIE

DANS

LE TRIANGLE ET LE TÉTRAÈDRE.

PREMIÈRE PARTIE.

CONSIDÉRATIONS SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE.

Préliminaires.

Nous nous proposons de démontrer que le défaut d'application aux propriétés métriques des principes de dualité et d'homographie est apparent et non réel, et que ces grands principes sont plus généraux et plus féconds qu'on le suppose. Nous prenons pour base des applications la Géométrie du triangle (1); nous la supposons connue; nous supprimerons donc, en principe, les démonstrations de tout fait qui ne nous semble pas nouveau.

Ainsi, nous admettons comme acquis des résultats tels que les suivants :

La conique représentée, en coordonnées barycentriques, par l'équation ponctuelle

$$F(X, Y, Z) = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0,$$

---

(1) Nous avons traité ces questions à un point de vue plus général, dans un Ouvrage (en préparation) intitulé : *Éléments comparés de Géométrie analytique*. Le présent Travail répond explicitement à la question 1142 que nous avons posée à l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, et nous dispensera d'en poser un grand nombre d'autres que nous avions en vue. Il répond également aux questions 1114, 1141 et 1143.



a pour centre le point dont les coordonnées, données par

$$F'_X = F'_Y = F'_Z,$$

sont

$$(c) \qquad a + b' + b'', \qquad a' + b'' + b, \qquad a'' + b + b',$$

a, a', ..., b'' étant les mineurs correspondant à A, A′, ..., B″ dans le discriminant Δ. D'où il résulte que la *corrélative* $[F(U, V, W) = 0]$ a pour équation ponctuelle

$$\Phi(X, Y, Z) = \Sigma a X^2 + 2 \Sigma b YZ = 0,$$

et pour centre

$$(c') \qquad A + B' + B'', \qquad A' + B'' + B, \qquad A'' + B + B',$$

Les coniques $F = 0$ et $\Phi = 0$ sont ellipses, paraboles ou hyperboles, selon que l'on a respectivement

$$\Sigma a + 2 \Sigma b \gtreqless 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta(\Sigma A + 2 \Sigma B) \gtreqless 0.$$

Les coordonnées ponctuelles du centre de l'une sont les coordonnées tangentielles de la polaire du barycentre par rapport à l'autre.

D'après les formules (c'), on peut faire correspondre à toute conique donnée $F = 0$, et *sans avoir besoin de calculer l'équation de sa corrélative,* un point remarquable (c') que nous appellerons le *centre corrélatif* de $F = 0$.

Définitions. — Deux éléments de même espèce constituent un *couple,* trois éléments un *triple,* quatre éléments un *quadruple,* etc.

A l'expression très usuelle : *milieu de la droite* AB, nous substituerons celle de *point moyen,* en sous-entendant les mots : *du système des points* A *et* B, pour le motif suivant : Si l'on s'habitue à cette notion ainsi formulée, on n'aura aucune peine à passer à celle de la *droite moyenne* (*du système des droites a et b*), le pivot et l'écueil des applications du principe de dualité. A la droite de l'infini $(X + Y + Z = 0)$ correspond dualistiquement le barycentre $(U + V + W = 0)$. (*Voir* Chap. IV.)

On appelle *point moyen du système des points* A *et* B le conjugué (harmonique) du point d'intersection de la droite de l'infini avec la jonction d des

On appelle *droite moyenne du système des droites a et b* la conjuguée (harmonique) de la droite de jonction du barycentre avec l'intersection D des droites

points A et B, dit *point de l'infini* de d. | a et b, dite *droite barycentrique* de D.

Remarque. — La Géométrie du triangle date de 1873, époque où M. Émile Lemoine signala, dans un premier Mémoire, les multiples propriétés du *point* auquel son nom a été légitimement attaché. En 1875, M. le Commandant Brocard donna à cette Géométrie une nouvelle et vive impulsion en la faisant entrer dans l'ordre d'idées si fécond du *couple de points*. Dès 1866, M. G. de Longchamps avait ouvert une grande voie, celle de la *corrélation* du point et de la droite. M. J. Neuberg, l'un des géomètres qui ont le plus contribué à créer cette Géométrie récente, l'a remarquablement résumée dans une *Note* insérée au Tome I du *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse (Gauthier-Villars et fils; 1891).

Lorsque l'on étudie la Géométrie du triangle, on peut être choqué au premier abord du nombre considérable de noms et mots nouveaux introduits. Mais on ne tarde pas à reconnaître que cette multiplicité de noms est *indispensable* pour la clarté. Il y a là, ainsi que l'a spirituellement remarqué notre ami Lemoine, « une nécessité comparable à celle de l'attribution de noms aux rues d'une ville, seul procédé qui permette de s'orienter dans leur dédale ». Nos lecteurs ont d'ailleurs depuis longtemps reconnu cette vérité qui s'imposera, plus grande encore, en Géométrie du tétraèdre.

CHAPITRE I.

TRIANGLE ABSOLU (OU CONSIDÉRÉ ISOLÉMENT).

Constitution d'un triangle.

Un couple de droites b et c se croisant en A est une conique de centre A. Toute droite AD passant par A est un diamètre; il lui correspond un diamètre conjugué AD′, que l'on obtient en menant une parallèle quelconque B′C′ à AD et prenant le point moyen D′ (du système B′, C′).

Un *triangle* ABC se présente donc comme essentiellement constitué par trois *coniques rectilignes* A, B, C, dont deux quelconques ont une droite commune, avec un triple de *sommets* (A, B, C) et un triple de *côtés* (a, b, c).

Éléments remarquables absolus.

Dans le triangle ABC, *considéré isolément*, sont remarquables : 1° les *points moyens* A_m, B_m, C_m des côtés, par suite les *médianes* et le *barycentre* G ; 2° les jonctions $B_m C_m$, $C_m A_m$, $A_m B_m$ des points moyens, qui forment le *triangle pédal* du barycentre ; 3° les parallèles $G_b G_c$, $G_c G_a$, $G_a G_b$, menées par les sommets, qui forment le *triangle complémentaire* de G, dont les sommets G_a, G_b, G_c sont les *points adjoints* à G. Ce sont les seuls éléments *descriptifs* du triangle ; ils sont *remarquables absolus*.

Tous les autres éléments (centres de cercles divers, orthocentre, points de Lemoine, de Brocard, etc.) sont *métriques,* et, par suite, *remarquables relatifs*. Ils sous-entendent *l'association* du triangle avec un cercle, *cas particulier d'une conique ;* nous les examinerons au Chapitre suivant.

Coniques remarquables absolues.

Nous appellerons *conique remarquable absolue* toute conique dont la définition ne dépend que des éléments remarquables absolus. Telles sont :

1° Les deux *ellipses de Steiner,* l'une circonscrite (E_c), l'autre inscrite (E_i), ayant leur centre en G, et qui sont corrélatives l'une de l'autre. L'ellipse E_c a pour équation $\Sigma YZ = 0$; elle passe par le *point de Steiner* $\left(\frac{1}{b^2 - c^2}, \dots\right)$ et plus généralement, quels que soient α, β, γ, λ, par tout point $\left(\frac{1}{\beta\lambda - \gamma\lambda}, \dots\right)$. L'ellipse E_i, qui touche les côtés en leurs points moyens, a pour équation

$$\Sigma X^2 - 2\Sigma YZ = 0;$$

elle passe par le *centre* (de l'hyperbole) *de Kiépert* $[(b^2 - c^2)^2, \dots]$, et plus généralement, par tout point $[(\beta\lambda - \gamma\lambda)^2, \dots]$.

2° Les trois *paraboles de Artzt,* tangentes à deux côtés aux

extrémités du troisième, dont les diamètres sont parallèles aux médianes et dont les équations sont :

$$X^2 - 4YZ = 0, \qquad Y^2 - 4ZX = 0, \qquad Z^2 - 4XY = 0.$$

La corrélative de la première est l'ellipse absolue $X^2 - YZ = 0$ dont le centre est au point $(1, -2, -2)$, *centre corrélatif* de la parabole $(X^2 - 4YZ = 0)$.

Coordonnées barycentriques.

On sait qu'il existe deux systèmes principaux de coordonnées *trilatères :* les coordonnées *normales* et les coordonnées *barycentriques.*

Mais il ne faut ni une grande pratique ni une longue expérience pour reconnaitre que, dans la *presque totalité* des questions de la Géométrie du triangle, les coordonnées barycentriques sont d'un emploi bien plus simple et bien plus commode que les coordonnées normales. La raison vient d'être indiquée : le barycentre est, dans le plan d'un triangle, le seul *centre remarquable absolu.* Nous emploierons donc exclusivement les *coordonnées barycentriques.*

Relations d'un point avec un triangle (*fig.* 1).

Soit le *triangle de référence* ABC et $D(\alpha, \beta, \gamma)$ un point arbitraire du plan.

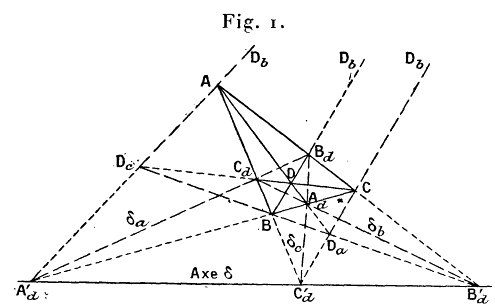
La *cévienne* AD a pour équation $\frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma}$; sa *conjuguée* $D_b D_c$, par rapport au couple A, a pour équation $\gamma Y + \beta Z = 0$.

Il en résulte que : 1° le *pied* A_d a pour coordonnées $(0, \beta, \gamma)$, le *pied conjugué* $A'_d(0, -\beta, \gamma)$, l'*adjoint* $D_a(-\alpha, \beta, \gamma)$; 2° la *pédale* $B_d C_d$, ou δ_a, a pour équation $\frac{X}{\alpha} - \frac{Y}{\beta} - \frac{Z}{\gamma} = 0$, et passe par A'_d; 3° les trois pieds conjugués A'_d, B'_d, C'_d sont sur une même droite $\delta\left(\frac{X}{\alpha} + \frac{Y}{\beta} + \frac{Z}{\gamma} = 0\right)$. Enfin A_d et A'_d sont *conjugués harmoniques* par rapport au segment BC, en sorte que l'on peut dire, *si l'on veut,* que δ est la droite *harmoniquement associée* à D.

Il nous paraît plus simple et même plus juste (*voir* ci-après) de dire que δ est l'*axe* du *centre* D, et de même δ_a, δ_b, δ_c sont res-

pectivement les axes des centres D_a, D_b, D_c, points et axes *adjoints* à D et δ.

Fig. 1.



Si d'ailleurs, au lieu de D, on prenait, par exemple, D_a pour *point initial*, ses adjoints seraient D, D_c, D_b, son axe serait δ_a et les axes adjoints seraient δ, δ_c, δ_b. On peut donc dire que, parmi les quatre points D, D_a, D_b, D_c, il n'y en a aucun qui soit *principal* et qu'ils forment un *quadruple de points associés,* δ, δ_a, δ_b, δ_c formant un *quadruple de droites associées.*

En résumé, *à tout point du plan correspondent trois points adjoints, un axe et trois axes adjoints.* Et réciproquement, pour une droite.

Conjugaison et conjugaison harmonique.

Dire que deux droites AA_d et AA'_d sont *conjuguées harmoniques* par rapport aux droites AB et AC, ou dire qu'elles sont *diamètres conjugués* du couple $\widehat{BAC}$, c'est la même chose. De même, il n'y a aucune différence entre deux points (A_d, A'_d) *conjugués harmoniques* par rapport au segment BC et ces deux points *conjugués* par rapport au système (B, C). Or la conjugaison harmonique se définit par l'égalité de deux rapports de distances; elle est, ainsi comprise, plus difficile à retenir et plus longue à traduire, soit par une construction géométrique, soit par une mise en équation, que la *conjugaison* par rapport à un système de deux droites ou de deux points. Nous adopterons donc cette dernière notion; son avantage apparaîtra surtout dans les applications dualistiques.

D'ailleurs, la *division harmonique* est une notion trop *restreinte;* elle n'a de signification que sur une droite ou autour d'un point. Mais deux droites restent *conjuguées* par rapport à une courbe du

deuxième ordre (conique proprement dite ou système de droites) si elles sont parallèles à deux diamètres conjugués. Il doit en être corrélativement de même pour la définition de deux points *conjugués* par rapport à une courbe de deuxième classe (conique proprement dite ou système de deux points) (*voir* Chap. IV).

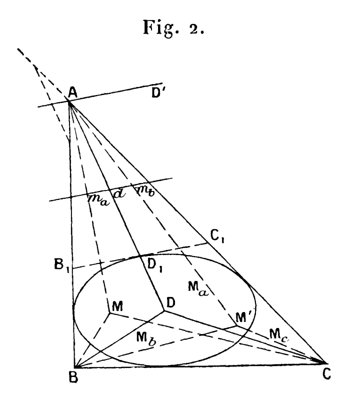
CHAPITRE II.

TRIANGLE ASSOCIÉ A UNE CONIQUE.

Définitions (*fig.* 2).

Étant donnés le triangle ABC, une droite AD passant par le point fixe D (α, β, γ) et une droite quelconque AM, nous appelons *droite*

Fig. 2.



isogène de AM par rapport à AD, la droite AM_a obtenue en menant le diamètre AD′ conjugué de AD par rapport au couple $\widehat{BAC}$, puis le diamètre AM_a conjugué de AM par rapport à $\widehat{DAD'}$.

Deux points m et m_a sont dits *isogènes* par rapport à AD (ou au point moyen de leur système, situé sur AD) s'ils sont l'intersection de deux droites isogènes et d'une parallèle quelconque à AD′.

Les droites AM, AM_a (ou les points m, m_a) sont dits *isotomiques* si D est le barycentre G, et *isogonales* (ou *isogonaux*) si D est le centre bissecteur I.

Si (x, y, z) sont les coordonnées d'un point M de AM, l'équation de son isogène AM_a est $\frac{Y}{\beta^2 z} = \frac{Z}{\gamma^2 y}$; d'où il résulte que les trois isogènes AM_a, BM_b, CM_c des céviennes de M par rapport à D se coupent au point $M'\left(\frac{\alpha^2}{x}, \frac{\beta^2}{y}, \frac{\gamma^2}{z}, \text{ ou } \sum \frac{\alpha^2}{x} U = 0\right)$, qui est le *réciproque de* M *par rapport à* D.

Corrélativement, étant données la droite $d(\Sigma \alpha X = 0)$, et une droite $m(\Sigma x X = 0)$, dont le point d'intersection (am_a) avec le côté a est $\frac{V}{y} = \frac{W}{z}$, l'équation de l'*isogène tangentiel* de am_a par rapport à d est $\frac{V}{\beta^2 z} = \frac{W}{\gamma^2 y}$; d'où il résulte que les trois isogènes am_a, bm_b, cm_c sont sur une droite $m'\left(\frac{\alpha^2}{x}, \frac{\beta^2}{y}, \frac{\gamma^2}{z} \text{ ou } \sum \frac{\alpha^2}{x} X = 0\right)$, qui est la (transversale) *réciproque de m par rapport à d.* On appelle spécialement *réciproque* $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ d'un point (ou d'une droite) le (ou la) réciproque de ce point (ou de cette droite) par rapport au barycentre (ou à la droite de l'infini) : 1, 1, 1.

Conique D et coniques d'espèce D.

Considérons la conique *inscrite* à ABC et ayant son centre en D, que nous nommerons *conique* D. Il est facile de voir que la tangente B_1C_1 à l'extrémité D_1 du diamètre passant par A est parallèle à AD'. Donc les conjuguées des céviennes de D par rapport à A, B, C sont aussi leurs conjuguées par rapport à la conique D, et l'on peut dire par suite que les droites AM et AM_a sont *isogènes par rapport à cette conique,* ou, plus simplement, *par rapport à* D.

Dans les applications qui suivent, nous appellerons *conique d'espèce* D toute conique homothétique à la conique D. Les mots *par rapport à* D seront partout sous-entendus. On retrouvera des propriétés connues en substituant au point D (α, β, γ) le centre I(a, b, c), aux coniques d'espèce D les cercles (coniques d'espèce I). Les synonymies telles que *point de Lemoine* et *point Lemoinien*, *conique* (d'espèce D) *Eulérienne* et *cercle d'Euler*, etc., sont transparentes.

Il sera facile de déduire des exemples ci-après, que l'on peut multiplier à l'infini les conséquences corrélatives en substituant à la conique *inscrite* D de centre D une conique *circonscrite* d ayant d pour polaire du barycentre. Mais cette transformation exige une notion nouvelle, celle de la corrélation des coniques *homothétiques* avec d'autres coniques que nous appellerons *homotangentes;* nous nous bornerons donc, pour le moment, aux questions ponctuelles; nous renvoyons au Chap. IV la question corrélative.

Point Lemoinien.

Nous appellerons *symédiane* (par rapport à D) du sommet A la droite AL_a, isogène de la médiane AG par rapport à D, et dont l'équation est $\frac{Y}{\beta^2} = \frac{Z}{\gamma^2}$. Les trois symédianes se coupent au point L $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$, qui est le *point Lemoinien*. Ce point unique correspond à quatre points initiaux (D, D_a, D_b, D_c), centres de coniques tangentes de *même espèce* D; si l'on prend L pour point initial, il a, comme tout autre, trois adjoints (L_a, L_b, L_c) constituant avec lui le quadruple (L, L_a, L_b, L_c).

L'*axe*, du centre L, est la *droite Lemoinienne* $\left(\sum \frac{X}{\alpha^2} = 0\right)$, dont le point à l'infini est $\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)$, etc., et qui a pour réciproque la *droite Longchampsienne* $(\Sigma \alpha^2 X = 0)$, dont le centre est le réciproque $L_\rho\left(\frac{1}{\alpha^2}, \ldots\right)$ du point Lemoinien, et dont le point à l'infini est $(\beta^2 - \gamma^2, \ldots)$.

Le point Lemoinien est le centre corrélatif : 1° de la *conique Eulérienne* $[\Sigma(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)X^2 - 2\Sigma\alpha^2 YZ = 0]$; 2° de la *conique Longchampsienne* $[\Sigma\alpha^2 X^2 + \Sigma(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)YZ = 0]$.

Il est le centre radical des trois *coniques Apolloniennes* (A_0, B_0, C_0)

$$(A_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2(\gamma^2 Y^2 - \beta^2 Z^2) \\ \quad - \beta^2(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2) ZX + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) XY = 0, \end{array} \right.$$

dont les centres $A_0\ (0, -\beta^2, \gamma^2)$, B_0, C_0 sont sur la droite Lemoinienne.

Les parallèles aux côtés de ABC menées par le point Lemoinien rencontrent les autres côtés en six points d'une même conique d'espèce D (dite *première conique Lemoinienne*) dont l'équation est

$$\Sigma\beta^2\gamma^2(\beta^2 + \gamma^2)X^2 - \Sigma\alpha^2(\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2)YZ = 0,$$

ayant pour centre le point

$$\alpha^2(\alpha^4 - \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\gamma^2 - 2\beta^2\gamma^2), \quad \ldots,$$

et pour centre corrélatif le point

$$\beta^6 + \gamma^6 + \alpha^2(\beta^4 + \gamma^4) + 4\alpha^2\beta^2\gamma^2, \quad \ldots.$$

Les six points d'intersection des conjuguées des symédianes menées par L avec les côtés non correspondants sont sur une conique d'espèce D (dite *seconde conique Lemoinienne*), dont le centre est L et dont l'équation est

$$(\Sigma\alpha^2)^2(\Sigma\alpha^2 YZ) - 2(\Sigma X)[\Sigma\beta^2\gamma^2(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)X] = 0.$$

Points Brocardiens.

Les deux *isobariques* $\left(\frac{1}{\beta^2}, \frac{1}{\gamma^2}, \frac{1}{\alpha^2}; \frac{1}{\gamma^2}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right)$ du réciproque $L_\rho\left(\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}, \frac{1}{\gamma^2}\right)$ du point Lemoinien sont les deux *points Brocardiens* β_1 et β_2. Leur jonction, dont l'équation est $\sum \frac{\alpha^4 - \beta^2\gamma^2}{\alpha^2} X = 0$, s'appelle la *droite Brocardienne*. Le point moyen du système (β_1, β_2) est le *point Brocardien moyen* $\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}, \ldots\right)$. C'est le *complémentaire* de L_ρ.

La *conique Brocardienne* d'espèce D a pour équation

$$\Sigma\beta^2\gamma^2 X^2 - \Sigma\alpha^4 YZ = 0.$$

Elle est concentrique à la première conique Lemoinienne; son centre corrélatif est le *centre Kiépertien* $[(\beta^2 - \gamma^2)^2, \ldots]$.

Elle passe par β_1, β_2, L, par le centre O de la conique circonscrite d'espèce D, par trois points $(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2; \beta^2, \alpha^2, \gamma^2; \gamma^2, \beta^2, \alpha^2)$, qui sont les *semi-réciproques* du point Lemoinien et forment les sommets du *premier triangle Brocardien;* par trois autres points $(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2, \beta^2, \gamma^2), \ldots$, qui sont les *foyers par rapport à* D (*voir* Chap. III) des paraboles absolues de Artzt et forment les sommets du *second triangle Brocardien;* etc.

La droite LO, dont l'équation est $\sum \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2} X = 0$ est dite *diamètre Brocardien;* elle est le lieu des centres des *coniques Tuckériennes d'espèce* D.

Éléments Kiépertiens, Tarryens, etc.

L'*hyperbole Kiépertienne* par rapport à D, dont l'équation est

$$\Sigma(\beta^2-\gamma^2)YZ=0,$$

est l'hyperbole circonscrite au quadrangle ABCG et dont les asymptotes sont conjuguées par rapport aux coniques d'espèce D. Comme toute hyperbole circonscrite remplissant cette dernière condition, elle passe par l'orthocentre par rapport à D $\left(\frac{1}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}, \ldots\right)$; elle passe en outre par $L_\rho\left(\frac{1}{\alpha^2}, \ldots\right)$, par le point Tarryen (*voir* ci-après), et par une infinité d'autres points remarquables. Son centre $[(\beta^2-\gamma^2)^2, \ldots]$ appartient à la conique Eulérienne d'espèce D [1].

Le *point Tarryen* $\left(\frac{1}{\beta^4+\gamma^4-\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)}, \ldots\right)$ est l'intersection de la conique circonscrite d'espèce D et de l'hyperbole Kiépertienne. Il est diamétralement opposé, dans la première conique, au *point Steinérien* $\left(\frac{1}{\beta^2-\gamma^2}, \ldots\right)$. Dans l'hyperbole, son point diamétralement opposé (ou *antipoint Tarryen*) est

$$\frac{1}{\alpha^4+2(\beta^4+\gamma^4)-3\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)-2\beta^2\gamma^2}, \quad \ldots.$$

On appelle *coniques Neubergiennes* (C_A^N, C_B^N, C_C^N) les trois coniques d'espèce D passant respectivement par A, B, C, et dont les centres sont aux intersections des médiatrices des côtés opposés avec les céviennes correspondantes du *point* Tarryen. L'équation de la conique C_A^N est

$$(C_A^N) \qquad \Sigma\alpha^2YZ-\alpha^2(Y+Z)\Sigma X=0.$$

On appelle *coniques Mac-Cayennes* (C_A^M, C_B^M, C_C^M) les trois coniques d'espèce D, passant par le barycentre G, et dont les centres sont aux intersections des médiatrices avec les céviennes correspondantes de l'*antipoint* Tarryen. L'équation de la conique C_A^M est

$$(C_A^M) \quad 3\Sigma\alpha^2YZ-[(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)X+\alpha^2(Y+Z)]\Sigma X=0.$$

---

(1) La situation du centre de Kiépert sur le cercle d'Euler est un fait qui a été peu remarqué et dont on peut déduire de nombreuses propriétés.

Les coordonnées respectives des centres de C_A^N et C_A^M sont

$$(C_A^N) \quad -\alpha^2\Sigma\alpha^2, \quad \alpha^4+\beta^4-\gamma^2(\alpha^2+\beta^2), \quad \gamma^4+\alpha^4-\beta^2(\gamma^2+\alpha^2),$$

$$(C_A^M) \quad \begin{cases} -\alpha^2\Sigma\alpha^2, \quad \gamma^4+2(\alpha^4+\beta^4)-3\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha^2\beta^2, \\ \beta^4+2(\gamma^4+\alpha^4)-3\beta^2(\gamma^2+\alpha^2)-2\gamma^2\alpha^2. \end{cases}$$

Coniques des sept points immédiats.

A tout point D (α, β, γ) correspondent un réciproque $\left(\frac{1}{\alpha}, \ldots\right)$, un Lemoinien $(\alpha^2, \ldots)$ et son réciproque, un point $(\alpha^3, \ldots)$ et son réciproque, etc. Chacun de ces points a deux isobariques D_1 et D'_1, par suite une droite isobarique d_1, avec un point moyen (ou complémentaire de D) D''_1 et un point de l'infini D'''_1, immédiatement connus. Soit $\Sigma LX = 0$ l'équation d'une droite d_1. Il est visible que la conique circonscrite $\Sigma LYZ = 0$ passe par les réciproques de D_1, D'_1, D''_1, D'''_1. Donc, *à tout point du plan correspondent une infinité de coniques des sept points immédiats.*

Exemple d'application. — Les trois sommets d'un triangle, ses deux points de Brocard, son point de Steiner et le réciproque du complémentaire du point de Lemoine appartiennent à une même hyperbole $[\Sigma(a^4-b^2c^2)YZ = 0]$ dont le centre corrélatif est le réciproque du point de Tarry.

CHAPITRE III.

HOMOGRAPHIE ET QUASI-MÉTRIE.

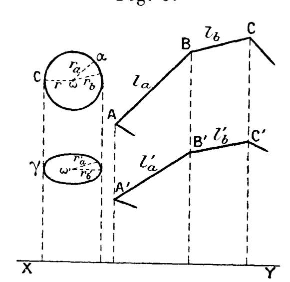
Considérations générales.

Soit (*fig.* 3) un cercle arbitraire C, de centre ω, ayant pour rayon l'*unité* r de longueur; soit ABC... une ligne brisée quelconque, l_a, l_b, l_c, ... les *longueurs* successives des côtés. Ces lon-

gueurs n'ont de signification que *par rapport à l'unité r*, et l'on semble s'être dit jusqu'à présent que l'on tient suffisamment compte de ce fait en les écrivant $\frac{l_a}{r}, \frac{l_b}{r}, \ldots$.

Mais : 1° l'*unité* n'est pas plus le rayon de C marqué arbitrairement r que tout autre rayon r_a, r_b, ...; 2° une *droite limitée* AB comporte, outre sa longueur l_a, une origine A et une *direction* $\overrightarrow{AB}$, définie, à partir de l'origine ω, par la direction $\overrightarrow{\omega\alpha}$ du rayon parallèle r_a. La longueur r_a est *la seule,* parmi l'infinité des *longueurs-unité r*, qui corresponde à la droite limitée AB, et de même pour

Fig. 3.



les autres. Les longueurs de la brisée ABC... *doivent donc s'écrire* $\frac{l_a}{r_a}, \frac{l_b}{r_b}, \ldots,$ et non $\frac{l_a}{r}, \frac{l_b}{r}, \ldots$. En d'autres termes, une longueur l_a, contenant k fois l'unité de longueur, n'a de sens que si on la considère comme partie de l'*équipollence relative* $l_a = kr_a$. Mais, avec r indéterminé, $l_a = kr$ n'est pas une équipollence et ne signifie rien [1].

Or, dans $\frac{l_a}{r_a} = k$, il n'y a plus de *longueur proprement dite,* mais, ce qui est fort différent, un *rapport de longueurs*. La longueur proprement dite était une grandeur déterminée, c'est-à-dire un *élément métrique*. Un rapport de longueurs, c'est-à-dire un *nombre,* devient un élément *absolu* et descriptif; il tombe naturellement sous l'application du *principe d'homographie*.

En effet, faisons une déformation homographique de la figure,

---

[1] Voir *Théorie et applications des équipollences*, par M. C.-A. Laisant (Paris, Gauthier-Villars et fils; 1887).

par exemple une réduction proportionnelle des ordonnées par rapport à un axe arbitraire XY. Cette opération transforme C en une conique γ, et l_a, r_a respectivement en l'_a, r'_a, essentiellement différentes de l_a, r_a, *comme longueurs proprement dites.* Mais il est visible que, l_a et r_a étant parallèles, l'_a et r'_a le sont également et que l'on a $\frac{l_a}{r_a} \equiv \frac{l'_a}{r'_a}$. Plus généralement, *dans toute déformation homographique, les rapports de longueurs de segments parallèles restent constants.* Toute relation *homogène* (et les propriétés géométriques n'en comportent pas d'autres) entre les *longueurs relatives à* C : $\frac{l_a}{r_a}$, $\frac{l_b}{r_b}$, ..., de la première figure, subsistera, dans la seconde, entre les *longueurs relatives à* γ : $\frac{l'_a}{r'_a}$, $\frac{l'_b}{r'_b}$, ...

Ainsi, la relation $\frac{MF_1}{r_1} \pm \frac{MF_2}{r_2} = \frac{AA}{r_a}$, avec $r_1 = r_2 = r_a$, exprime cette propriété géométrique : dans toute conique q, la somme (ou différence) des distances (par rapport à C) d'un point M de q aux deux foyers F_1 et F_2 (points tels que leur distance, par rapport à C, à un point quelconque de q, soit une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de ce point) est constante et égale à la longueur (par rapport à C) du diamètre focal AA. La même relation (accentuée), avec $r'_1 \neq r'_2 \neq r'_a$, mais $\frac{M'F'_1}{r'_1} \equiv \frac{MF_1}{r_1}$, ..., est la traduction de cette propriété : *dans toute conique* q, *la somme ou différence des distances (par rapport à une autre conique* γ*) d'un point* M' *de* q *aux deux foyers* F'_1 *et* F'_2 *(points tels que leur distance par rapport à* γ *à un point quelconque de* q, *soit, etc.) est constante et égale, par rapport à* γ, *à la longueur du diamètre focal* A'A'.

Généralisation de définitions.

Nous appellerons *distance de deux points* (ou *longueur d'un segment*) *par rapport à une conique* γ, le rapport de cette distance ou longueur, mesurée métriquement, à la longueur, mesurée de même, du rayon parallèle dans γ. En coordonnées cartésiennes,

$$\left[\varphi(X, Y) = X^2 + 2\frac{B}{A}XY + \frac{C}{A}Y^2\right] + \ldots = 0$$

étant l'équation générale des coniques homothétiques à γ, la formule

de la distance de deux points (x, y et α, β) reste

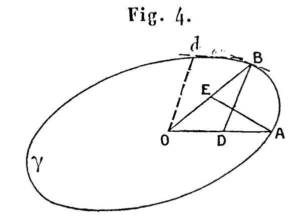
$$\delta^2 = \varphi(x - \alpha, y - \beta).$$

Une conique est, par suite, le lieu des points dont la distance à un point fixe (α, β) est *constante par rapport à elle-même* (ou à ses homothétiques).

Deux angles A et B seront dits *égaux par rapport à* γ si les angles au centre qui leur sont parallèles sont sous-tendus par des cordes aa, bb, égales par rapport à γ.

En *trigonométrie conique* ou par rapport à la conique donnée γ (*fig.* 4), nous appellerons *sinus* de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ le rap-

Fig. 4.



port $\frac{BD}{Od}$, et *cosinus* de cet angle le rapport $\frac{OD}{OA}$, les droites OA et BD étant conjuguées par rapport à γ, Od étant le rayon parallèle à BD. Si AE est la conjuguée de OB, on a

$$\sin O = \frac{BD}{Od} = \frac{AE}{OE}, \qquad \cos O = \frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB},$$
$$\sin^2 O + \cos^2 O = 1, \qquad \ldots.$$

L'*aire d'un triangle par rapport à* γ sera le produit de la base AB (par rapport à γ) par la moitié de la hauteur conjuguée h_c (par rapport à γ).

Par rapport au *triangle de référence* ABC, *associé à la conique de base* γ, les *coordonnées barycentriques* d'un point M seront les aires, par rapport à γ, des triangles MBC, MCA, MAB. L'origine, point *absolu*, indépendant de γ, est le barycentre (1, 1, 1).

Conséquences.

La géométrie métrique plane, ou géométrie par rapport à C, est un cas particulier d'une *géométrie quasi-métrique,* générale,

par rapport à la conique *générale* γ, et qui est *descriptive* [1].

Il est visible, d'ailleurs, qu'il n'est besoin ni de changer ni même d'accentuer aucune notation, car il suffit de convenir, une fois pour toutes, qu'il y a toujours une certaine *conique de base* γ, qui peut être exceptionnellement C, donnée *d'espèce*, mais non de grandeur et de position, susceptible d'être remplacée par une homothétique quelconque et par rapport à laquelle on étudie.

Si, dans un triangle ABC, avec le point arbitraire $D(\alpha, \beta, \gamma)$, on prend pour conique de base la conique tangente dont le centre est D, *les coordonnées* α, β, γ *de ce point sont proportionnelles aux longueurs* a, b, c *des côtés par rapport à cette conique*. On peut, dès lors, les représenter par a, b, c, et il devient évident que tout ce qui a été démontré *métriquement* (par rapport à I) reste vrai *quasi-métriquement* (par rapport à D). Ainsi :

1° Les *rayons* des principales coniques d'espèce D sont :

Conique circonscrite au triangle......... $R = \frac{abc}{4S}$

Conique tangente de centre D (de base).. $r = \frac{S}{p}$

Conique tangente de centre D_a (adjointe). $r_a = \frac{S}{p-a}$

Conique Eulérienne (ou des neuf points). $\rho_E = \frac{R}{2}$

Conique Longchampsienne.............. $\rho_L = 4R\sqrt{-\cos A \cos B \cos C}$

Première conique Lemoinienne.......... $\rho_1^L = \frac{R\sqrt{\Sigma b^2c^2}}{\Sigma a^2}$

Deuxième conique Lemoinienne......... $\rho_2^L = \frac{abc}{\Sigma a^2}$

Conique Brocardienne.................. $\rho_B = \frac{R}{2}\sqrt{1 - 3\tang^2\theta}$

Conique Neubergienne C_A^N............... $\rho_A^N = \frac{a}{2}\sqrt{\cot^2\theta - 3}$, ...

2° Les points de Brocard (ou Brocardiens) sont définis par les égalités d'angles

$$\widehat{\beta_1 BC} = \widehat{\beta_1 CA} = \widehat{\beta_1 AB}, \qquad \widehat{\beta_2 CB} = \widehat{\beta_2 AC} = \widehat{\beta_2 BA}.$$

(1) La possibilité d'extension à la Géométrie de l'espace est évidente.

Ces six angles ont une valeur commune θ (*angle de Brocard*) qui, *dans tous les cas*, vérifie les relations trigonométriques :

$$\cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C,$$
$$\sin(A - \theta)\sin(B - \theta)\sin(C - \theta) = \sin^2\theta,$$
$$\text{coséc}^2\theta = \text{coséc}^2 A + \text{coséc}^2 B + \text{coséc}^2 C,$$
$$\Sigma \sin A \cos(A + \theta) = 0. \qquad \text{(Neuberg.)}$$

3° Toute relation métrique subsiste. Ainsi, le point Lemoinien est celui dont la somme des carrés des distances aux trois côtés est minimum par rapport à D $\left(\text{ce minimum ayant pour expression } \dfrac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$.

4° Si l'on veut étudier des figures semblables, il suffira de remplacer C par D dans cette définition : deux figures sont *semblables* (par rapport à C) si deux triples *arbitraires* de points homologues forment deux triangles équiangles par rapport à C, etc.

CHAPITRE IV.

PRINCIPE DE DUALITÉ.

Considérations générales.

Le *principe de dualité* est peu employé dans la Géométrie du triangle, même en ce qui concerne les propriétés *descriptives*, quoique l'universalité de son application à ces propriétés soit reconnue.

Les *transversales réciproques* de M. de Longchamps (*Nouvelles Annales*, 1866) et l'étude générale des droites que l'on trouve dans le Mémoire de ce géomètre, intitulé *Généralités sur la Géométrie du triangle* (*Journal de Mathématiques élémentaires*, 1886), sont cependant un premier et grand pas fait vers l'application du principe de dualité à cette Géométrie. Le Mémoire de 1886 est surtout

consacré, ainsi que l'indique un sous-titre, à l'étude des *points réciproques* et des *potentiels d'ordre p*. Il examine au même point de vue les transversales. Mais, tous les faits de réciprocité signalés sont, comme nous l'avons déjà montré (Chap. II), des cas particuliers d'un fait absolument général : *la réciprocité de deux points* M *et* M' *par rapport à un pôle donné* D, *ou de deux droites m et m' par rapport à une polaire donnée d.*

Le principe de dualité est susceptible de bien d'autres applications que celles qui concernent la réciprocité.

Rappelons d'abord quelques propriétés fondamentales.

On sait que, *corrélativement :* 1° à tout point du plan correspond une droite, et réciproquement, car *l'équation ponctuelle*

$$UX + VY + WZ = 0$$

de la droite dont les *coordonnées tangentielles* sont U, V, W et *l'équation tangentielle*

$$XU + YV + ZW = 0$$

du point dont les *coordonnées ponctuelles* sont X, Y, Z, sont identiques ; 2° à la *jonction* de deux points correspond l'*intersection* de deux droites ; 3° à la *droite de l'infini* correspond un point *fini* dit *origine,* que l'on est libre (en coordonnées cartésiennes) de choisir dans le plan, ce choix *fixant la figure* de la corrélative. Mais cette faculté n'existe pas avec coordonnées trilatères, car le choix du système de ces coordonnées *fixe l'origine*. A la droite de l'infini ($X + Y + Z = 0$) correspond le barycentre G($U + V + W = 0$) et nul autre point. L'origine, en coordonnées barycentriques, est donc, obligatoirement, le barycentre G [1].

A tout système de trois droites qui détermine un *triple d'intersections* correspond un système de trois points déterminant un *triple de jonctions*. Cette remarque si simple est d'une importance capitale. Elle peut se préciser comme il suit : *si, pour l'étude d'un point* D *par rapport au triangle* ABC, *on a considéré ce triangle comme le système* (*abc,* ABC), *pour l'étude de la corrélative d*

(1) En coordonnées normales, à cause de $\left| \begin{array}{l} \Sigma a X = 0 \\ \Sigma a U = 0 \end{array} \right|$, l'origine serait le point de Lemoine.

par rapport au triangle corrélatif, on devra considérer ce triangle comme le système (ABC, *abc*), *ou réciproquement.*

Le corrélatif d'un triangle ABC n'est pas, en général, *le même* triangle *abc* ; mais il est facile de voir que, par une opération homographique des plus simples, il redevient *le même*.

La corrélative du point moyen $A_m(U+V=0)$ de (B, C) est la parallèle $a_m(Y+Z=0)$ menée par A à BC. Le corrélatif de la médiane $AA_m(Y-Z=0)$ est le point à l'infini $aa_m(U-V=0)$ sur BC. La parallèle p, menée par un point M à une droite donnée d, jonction de M au point D_i à l'infini sur d, a pour corrélative l'intersection P de la corrélative m de M et de la droite barycentrique d_i corrélative de D_i.

L'application *littérale* des principes qui précèdent lève toujours toute difficulté, en ce qui concerne les propriétés descriptives proprement dites. Nous citerons comme exemple le double théorème suivant, que nous croyons *nouveau* et l'un des plus féconds de la Géométrie du triangle [1] :

Étant donnés le triangle ABC *et deux points arbitraires* D_1 *et* D_2 ; *si* A_1, B_1, C_1 *sont les intersections respectives de* CD_1 *et* BD_2, AD_1 *et* CD_2, BD_1 *et* AD_2 ; A_2, B_2, C_2 *celles de* CD_2 *et* BD_1, AD_2 *et* CD_1, BD_2 *et* AD_1 : 1° *les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *concourent en un point* P ; 2° *les droites* AA_2, BB_2, CC_2 *concourent en un point* Q ; 3° *les droites* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *concourent en un point* R, *situé sur* PQ, *et qui est le* résultant *de l'association,* (PQR) *en étant la droite* remarquable,

Étant donnés le triangle abc et deux droites d_1 *et* d_2 ; *si* a_1, b_1, c_1 *sont les jonctions respectives de* cd_1 *et* bd_2, ad_1 *et* cd_2, bd_1 *et* ad_2 ; a_2, b_2, c_2 *celles de* cd_2 *et* bd_1, ad_2 *et* cd_1, bd_2 *et* ad_1 : 1° *les points* aa_1, bb_1, cc_1 *sont sur une droite p ;* 2° *les points* aa_2, bb_2, cc_2 *sont sur une droite q ;* 3° *les points* a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 *sont sur une droite r passant par pq, et qui est la* résultante *de l'association,* (*pqr*) *en étant le point* remarquable,

(x, y, z) *et* (x', y', z') *étant les coordonnées respectives* (*ponctuelles de* D_1 *et* D_2, *ou tangentielles de* d_1 *et* d_2), *les coordonnées*

---

[1] On est prié de faire les figures ; elles n'offrent aucune difficulté.

de P, Q, R (*ou* p, q, r) *sont :*

(P) $$\frac{1}{y'z}, \quad \frac{1}{z'x}, \quad \frac{1}{x'y};$$

(Q) $$\frac{1}{yz'}, \quad \frac{1}{zx'}, \quad \frac{1}{xy'};$$

(R) $$\frac{1}{y'z}+\frac{1}{yz'}, \quad \ldots.$$

Le théorème ponctuel place tout point du plan dans la *situation* du point moyen de Brocard, en le présentant sur une droite *remarquable,* comme *flanqué* de deux points associés P et Q dont il est le *résultant* (bien que n'en étant pas, en général, le point moyen). Si D_1 est le barycentre et D_2 l'orthocentre, P et Q sont les points $\left(\frac{\cos B}{b}, \ldots\right)$ et $\left(\frac{\cos C}{c}, \ldots\right)$; R est le point de Lemoine (a^2, b^2, c^2); la droite PQR est $\Sigma[b^4+c^4-a^2(b^2+c^2)]X = 0$; c'est l'*axe* du point de Tarry. Voici donc une relation peu attendue entre les éléments G (barycentre), H (orthocentre), L (Lemoine), T (Tarry). Or, les relations de G, H, L avec les autres éléments remarquables sont en nombre infini. L relie G à I comme *inverse* de G ; il est le centre corrélatif d'Euler et de Longchamps, le centre radical d'Apollonius, le centre d'origine des Tucker, le point de départ des Brocard ; T, situé sur le cercle O où il est opposé à S (Steiner) est, par lui-même et par son antipoint T′ la base de la définition des Neuberg et des Mac-Cay ; il est situé sur K (Kiépert) dont le centre est sur E (Euler) et centre de la corrélative de B (Brocard). S'il y a un élément remarquable du triangle qui ait échappé à cette filière, il ne faudra pas chercher longtemps pour l'y rattacher. Enfin, il est facile d'établir, par le théorème tangentiel, une filière corrélative et de varier à l'infini les résultats avec les points initiaux (D_1, D_2) ou les droites initiales (d_1, d_2).

Corrélation par conjugaison.

THÉORÈME. — *Si deux droites sont conjuguées par rapport à une conique, les deux points corrélatifs sont conjugués par rapport à la conique corrélative.* En effet :

On appelle *diamètres conjugués* par rapport à une conique γ, deux droites δ_1 et δ_2, joignant le

Appelons *diamétraux conjugués* par rapport à γ, deux points Δ_1 et Δ_2, intersections de la droite

centre (pôle de la droite de l'infini) à deux points J_1 et J_2 de cette droite, conjugués par rapport aux deux points I_1 et I_2 (réels ou imaginaires) communs à cette droite et à la conique.

Deux droites quelconques d_1 et d_2 sont dites *conjuguées* si elles sont parallèles à δ_1 et δ_2, c'est-à-dire coupent ces diamètres sur la droite de l'infini. On peut toujours mener par un point une droite conjuguée d'une droite donnée.

de l'infini (polaire du centre) et de deux droites j_1 et j_2 passant par ce centre et conjugués des deux tangentes ou asymptotes i_1 et i_2 (réelles ou imaginaires) menées de ce point à la conique.

Deux points quelconques D_1 et D_2 sont dits *conjugués* s'ils sont situés sur des droites joignant les diamétraux conjugués Δ_1 et Δ_2 au centre. On peut toujours prendre sur une droite un point conjugué d'un point donné.

Théorème de Simson et son corrélatif.

Toute conique circonscrite à ABC *est le lieu des points tels que les conjuguées a', b', c', menées de ces points aux côtés a, b, c, soient sur une même droite k (Simsonienne).*

Soit $D(\Sigma \alpha U = 0)$ un point de la conique circonscrite

$$LYZ + MZX + NXY = 0.$$

En formant les équations ponctuelles des conjuguées a', b', c' menées de D à a, b, c, déterminant les intersections aa', bb', cc', on obtiendra trois points dont les coordonnées ponctuelles sont $(l, m, n;\ l', m', n';\ l'', m'', n'')$, et *l'on sait* (le théorème étant connu) que la condition

$$\Sigma\, l(m'n'' - m''n') = 0$$

donne finalement $\Sigma L \beta\gamma = 0$.

Toute conique inscrite à abc est l'enveloppe des droites telles que les jonctions aux sommets A, B, C *des conjugués de ces sommets pris sur ces droites, concourent en un point* K.

Soit $d(\Sigma \alpha x = 0)$ une tangente à la conique inscrite

$$LVW + MWU + NUV = 0.$$

En formant les (mêmes) équations tangentielles des conjugués A′, B′, C′ de A, B, C pris sur d, déterminant les jonctions AA′, BB′, CC′, on obtiendra trois droites dont les (mêmes) coordonnées tangentielles sont

$(l, m, n;\ l', m', n';\ l'', m'', n'')$.

Par suite, la (même) condition

$$\Sigma\, l(m'n'' - m''n') = 0$$

C.Q.F.D.

On appliquera le même mode de démonstration aux corollaires tels que les suivants :

Corollaire (connu). — L'enveloppe des droites k est une courbe de troisième classe, unicursale, à trois rebroussements (les sommets) sur tangentes conjuguées des côtés.

Corollaire. — Le lieu des points K est une cubique, unicursale, à trois tangentes d'inflexion (les côtés), avec points de contact conjugués des sommets.

Remarque. — Si l'on cherchait une démonstration *ponctuelle* du théorème corrélatif, on pourrait ne pas aboutir; mais la probabilité d'échec serait la même pour une démonstration *tangentielle* du théorème primitif. Dans tous les cas, l'une entraîne l'autre.

Conditions d'application du principe de dualité.

Il ne faut demander à la dualité comme à l'homographie, *principes de déformation*, que ce que ces principes peuvent donner, c'est-à-dire une *transformation de propriétés,* mais non des propriétés conservant la nature *métrique* (ou par rapport au cercle).

Lorsque quatre points remarquables M, N, P, Q sont sur une même circonférence, cette circonférence est dite *cercle remarquable.* Sa corrélative est une conique *non-cercle,* à laquelle les corrélatives m, n, p, q des quatre points sont tangentes. Cinq conditions étant nécessaires pour déterminer une conique *non-cercle,* on en conclut souvent, mais à tort, qu'*il n'y a plus propriété.*

On doit en effet remarquer que, si trois conditions suffisent pour déterminer un cercle, cela tient à ce qu'il y a déjà *deux conditions fixes sous-entendues,* à savoir que cette conique sera *de l'espèce cercle,* c'est-à-dire passera par deux points imaginaires donnés à l'infini (les points cycliques). Mais si l'on considère *l'espèce* γ des coniques assujetties à deux conditions quelconques *fixes et sous-entendues*, il ne faut plus que trois conditions pour déterminer une conique γ' *de cette espèce;* si l'on constate que cette conique satisfait à quatre conditions remarquables de passage ou de contact, c'est une propriété tout aussi remarquable *par rapport à l'espèce* γ qu'elle peut l'être *par rapport à l'espèce cercle.*

Appelons coniques *homotangentes* les coniques assujetties à être tangentes à deux droites fixes et données (réelles ou imaginaires)

dont l'intersection détermine l'origine (point quelconque en coordonnées cartésiennes, barycentre en coordonnées barycentriques). Ce sont les corrélatives des coniques *homothétiques,* et nous allons prouver que cette notion nouvelle est utile et peut devenir féconde.

Coniques homothétiques et coniques homotangentes.

Prenons, pour plus de commodité, des coordonnées cartésiennes.

En désignant par $\varphi(X, Y)$ ou $\varphi(U, V)$ une fonction quadratique homogène *donnée,* par $p = \lambda X + \mu Y$ ou $\lambda U + \mu V$ une fonction linéaire *variable,* par q un paramètre variable, par T ou R la *variable d'homogénéité* :

L'équation générale d'une famille de *coniques homothétiques* est

$$\varphi(X, Y) + pT + qT^2 = 0.$$

Toutes ces coniques coupent la droite de l'infini aux points (r. ou i.)

$$\varphi(X, Y) = 0, \qquad T = 0.$$

Une conique (p_1, q_1) et une conique (p_2, q_2) ont un *axe radical*

$$A_{12} = (p_1 - p_2) + (q_1 - q_2)T = 0,$$

conjugué de la droite de jonction des centres, et jonction des points *finis* communs (r. ou i.).

Les axes radicaux de trois coniques (1, 2, 3) se coupent en un *centre radical*

$$A_{12} = A_{23} = A_{31}.$$

Deux coniques (1 et 2) ont deux *centres d'homothétie* situés sur la droite de jonction des

L'équation générale d'une famille de *coniques homotangentes* est

$$\varphi(U, V) + pR + qR^2 = 0.$$

Toutes ces coniques sont tangentes aux droites (r. ou i.) passant par l'origine

$$\varphi(U, V) = 0, \quad R = 0.$$

Une conique (p_1, q_1) et une conique (p_2, q_2) ont un *point radical*

$$a_{12} = (p_1 - p_2) + (q_1 - q_2)R = 0,$$

conjugué de l'intersection des polaires de l'origine, et intersection des tangentes *non d'origine* communes (r. ou i.).

Les points radicaux de trois coniques (1, 2, 3) sont sur une *droite radicale*

$$a_{12} = a_{23} = a_{31}.$$

Deux coniques (1 et 2) ont deux *droites d'homotangence,* passant par l'intersection des po-

centres, et intersections de deux tangentes communes *associées*.

Si l'un des centres d'homothétie est à l'infini, les coniques homothétiques deviennent (ponctuellement) *égales*.

Deux coniques (homothétiques ou non) sont *concentriques* si elles ont le même pôle de la droite de l'infini; etc.

laires de l'origine et jonctions de points communs *associés*.

Si l'une des droites d'homotangence passe par l'origine, nous dirons que les coniques deviennent *tangentiellement égales*.

Deux coniques (homotangentes ou non) peuvent être dites *conpolaires* si elles ont la même polaire de l'origine; etc.

Application.

A tout point P du plan, on peut faire correspondre, sur une même conique q, quatre points (r. ou i.) P_1, P_2, P_3, P_4, tels que leurs tangentes soient conjuguées, par rapport à une conique de base γ, des jonctions concourantes PP_1, PP_2, PP_3, PP_4 (que nous appellerons *quasi-normales*).

Trois de ces points (P_1, P_2, P_3) et le point P'_4, tel que sa tangente coupe celle au point P_4 sur la droite de l'infini, sont sur une même conique *homothétique* à γ (théorème de *Joachimsthal* généralisé).

A toute droite p du plan, on peut faire correspondre quatre tangentes (r. ou i.) p_1, p_2, p_3, p_4 à une même conique q, telles que leurs points de contact soient conjugués par rapport à une conique de base γ, des intersections en ligne droite pp_1, pp_2, pp_3, pp_4 (que nous appellerons *quasi-normaux*).

Trois de ces droites (p_1, p_2, p_3) et la tangente p'_4, telle que son point de contact soit avec celui de p_4 en ligne droite avec l'origine, sont tangentes à une même conique *homotangente* à γ (théorème corrélatif).

On peut imaginer une infinité d'autres applications; nous avons indiqué celle qui précède parce qu'elle présentait une certaine difficulté.

Relations métriques.

On sait que les deux principes qui permettent, *dans une certaine mesure*, la transformation dualistique des relations métriques sont : 1° l'un des angles formés par deux droites est égal à l'un des angles formés par les droites qui joignent à l'origine leurs points corrélatifs

(*relations angulaires*) ; 2° le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite ou de quatre droites concourantes est égal au rapport anharmonique des éléments corrélatifs (*relations segmentaires*). Ce sont des solutions; mais elles ne s'appliquent qu'à un nombre très restreint de cas; elles sont donc incomplètes.

La difficulté principale est celle-ci : à une droite d correspond un point D ; au point de l'infini sur d correspond la droite *d'origine* DO. Si l'on prend sur d deux points A et B, il en résulte : 1° deux droites corrélatives a et b passant par D ; 2° un *point moyen* M, conjugué du point de l'infini sur d par rapport au système (A, B) et auquel correspond (Chap. Ier) la *droite moyenne* m, conjuguée de DO par rapport à (a, b); 3° une *longueur* du segment AB, à laquelle *il ne* SEMBLE *rien correspondre*.

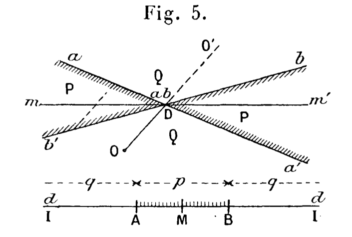
Mais les difficultés en mathématiques tiennent souvent, ainsi que le remarque Chasles (*Aperçu historique*), à ce que l'on n'a pas rencontré le point de vue véritable qui permettrait de faire disparaître l'obstacle. La question actuelle est un sujet immense que nous ne pouvons traiter ici avec les développements qu'il comporterait; mais les observations suivantes paraissent être passées inaperçues.

1° Pour arriver à l'application du *principe de dualité,* il faut commencer par faire une guerre impitoyable aux *locutions vicieuses,* si vénérables qu'elles puissent être. Nous nous sommes déjà expliqué sur *le milieu d'une droite* et la *conjugaison harmonique.* L'*angle de deux droites* est une locution vicieuse ; il faut dire : *l'un des angles formés par deux droites.* Deux points *diamétralement opposés* doivent faire place à *deux points dont les tangentes sont parallèles.* Et même, l'expression *droites parallèles,* excellente au point de vue ponctuel exclusif, ne vaut pas, au point de vue dualistique, la suivante : *droites se rencontrant en un point déterminé de la droite de l'infini.* Le mot *faisceau* est trop vague et ne vaut pas ceux de *couple, triple, quadruple,* etc.

2° Si, au point de vue *métrique,* il convient de considérer deux droites comme déterminant deux angles *supplémentaires* et deux points comme déterminant *une* longueur limitée, il n'en est pas de même *au point de vue dualistique.* A cet égard (*fig.* 5), deux droites a et b doivent être considérées comme partageant, *autour du point ab,* le plan de dimensions infinies en deux *plans limités* P et Q ; l'un, P, contient la droite moyenne m ; l'autre, Q, contient sa conjuguée, la droite d'origine DO. De même, deux points A et B

divisent la droite *illimitée* d en deux *droites limitées* $\overrightarrow{AB}$ ou p et $\overrightarrow{BIA}$ ou q ; p contient le point moyen M et q son conjugué, le

Fig. 5.



point I de l'infini. P est corrélatif de p, Q de q, $(am, a'm')$ de AM, $(bm', b'm)$ de BM, $(aO', a'O)$ de AI, $(bO', b'O)$ de BI. Donc, *à une longueur correspond dualistiquement un angle, et réciproquement.*

3° Cette conclusion aurait pu être considérée comme évidente, *a priori,* car l'essence du principe de dualité est le *changement de nom* des propriétés. La recherche dualistique des corrélations *de même nom* (ponctuel et ponctuel, tangentiel et tangentiel, segmentaires et segmentaires, angulaires et angulaires) est une chimère. Les corrélations *de nom contraire* (de ponctuel à tangentiel, *de segmentaire à angulaire,* et réciproquement) sont et doivent être des *réalités.*

4° Soient (ABCN) et $(abcn)$ deux quadruples de points en ligne droite et de droites concourantes, corrélatifs. L'égalité de leurs rapports anharmoniques s'exprime par

$$\frac{AC.BN}{CB.AN} = \frac{\sin(a, c).\sin(b, n)}{\sin(c, b).\sin(a, n)} = \rho.$$

Si N tend vers l'infini, ou n vers une droite d'origine, on a, à la limite,

$$\frac{BN}{AN} = \frac{\sin(b, n)}{\sin(a, n)} = 1,$$

et le *rapport des triples* (ABC) ou (abc) devient

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\sin(a, c)}{\sin(c, b)} = \rho.$$

Nous avons montré (Chap. III) que ce que l'on appelle *distance de deux points* est, en réalité, le rapport de deux longueurs mé-

triques. Il est facile de déduire de ce qui précède que ce que l'on appelle *angle de deux droites* peut et doit se traduire par le *rapport de deux sinus métriques*. (*Voir* ci-après.)

Toute conique est le lieu des points A auxquels on peut faire correspondre un point B tel que le couple (A, B) admette pour point moyen un point fixe C.

Toute conique est l'enveloppe des droites a auxquelles on peut faire correspondre une droite b telle que le couple (a, b) admette pour droite moyenne une droite fixe c.

Une conique est le lieu des points dont la distance (ou *rapport linéaire*) à un point fixe est constante par rapport à elle-même et à ses homothétiques.

Une conique est l'enveloppe des droites dont l'angle (ou *rapport angulaire*) avec une droite fixe est constant par rapport à elle-même et à ses homotangentes.

Applications diverses.

La question 1142 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* à laquelle répond spécialement cette brochure, était encadrée entre deux questions géométriques : 1141 (de M. Grip) et 1143 (de M. Milèse).

A M. Grip, nous avons répondu : « L'équation demandée est [1]:

$$\Sigma L(BX^2 + AY^2 - ABT^2)(CX^2 + AZ^2 - CAT^2) = 0.$$

Elle exprime le théorème suivant :

» *Le lieu des points desquels on peut mener à une quadrique* $Q\left(\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} - T^2 = 0\right)$ *un triple de tangentes conjuguées par rapport à une autre quadrique* $\Sigma\left(\frac{X^2}{L} + \frac{Y^2}{M} + \frac{Z^2}{N} + \ldots = 0\right)$ *est une surface du quatrième ordre* (*et de trente-sixième classe*), *concentrique à* Q *et admettant les éléments conjugués communs à* Q *et* Σ.

[1] On trouve immédiatement cette équation en exprimant que le cône de sommet (x, y, z, t) circonscrit à Q est capable de trièdres *inscrits* conjugués par rapport à Σ.

» L'équation

$$\Sigma L(BU^2 + AV^2 - ABR^2)(CU^2 + AW^2 - CAR^2) = 0$$

exprime non moins explicitement ce théorème :

» *L'enveloppe des plans dans lesquels on peut tracer des triangles dont les côtés soient tangents à une quadrique* $Q\left(\frac{U^2}{A} + \frac{V^2}{B} + \frac{W^2}{C} - R^2 = 0\right)$, *leurs points de contact étant conjugués par rapport à* $\Sigma\left(\frac{U^2}{L} + \frac{V^2}{M} + \frac{W^2}{N} + \ldots = 0\right)$, *est une surface de quatrième classe* (*et du trente-sixième ordre*) conpolaire *à* Q *et admettant les éléments conjugués communs à* Q *et* Σ. »

Nous avons répondu à M. Milèse : « La question des ovales de Descartes, et plus généralement des cartésiennes, est étudiée avec détails dans l'Ouvrage de M. Salmon (*Courbes planes,* p. 353) [1]. Si vous voulez bien vous y reporter, ayez l'obligeance de comparer cette question ponctuelle avec la traduction dualistique (ou tangentielle) que je vous envoie. »

Si les courbes du quatrième ordre et de douzième classe dites *Cartésiennes* ont trois *foyers* en ligne droite jouissant de propriétés déterminées, il est (ou devrait être) clair que leurs corrélatives de quatrième classe et du douzième ordre ont trois *focales* concourantes jouissant des propriétés corrélatives (à traduire).

Un de nos amis, dont le nom est celui le plus souvent cité dans ce petit Ouvrage, nous a demandé : « Quelle est la proposition qui dualise celle-ci : La somme des carrés des distances du point de Lemoine aux trois côtés du triangle ABC est minimum et égale à $\frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$? »

Nous avons répondu : Puisque l'on considère ponctuellement : 1° la distance de deux points ; 2° la distance d'un point à une droite, on est amené à considérer tangentiellement : 1° l'angle de deux droites ; 2° *l'angle d'une droite et d'un point.* C'est une notion *nouvelle,* mais *qui s'impose ;* définissons-la par traduction :

On appelle *distance d'un point* A *à une droite d,* dont

Appelons *angle d'une droite a avec un point* D, dont la jonc-

---

[1] *Traité de Géométrie analytique,* traduit par M. Chemin (Paris, Gauthier-Villars, 1884).

l'intersection avec sa conjuguée par rapport à la conique de base γ, menée par A, est D, le rapport de la longueur métrique du segment AD à la longueur métrique du rayon $\alpha\delta$ de γ, α étant le centre, et δ une des extrémités du rayon parallèle à AD (l'autre extrémité étant équidistante du centre).

tion avec son conjugué par rapport à la conique de base γ, pris sur a, est d, le rapport du sinus métrique de l'angle (a, d) au sinus métrique de l'angle (α, δ), α étant la polaire de l'origine par rapport à γ, et δ une des tangentes menées de l'origine à cette conique (l'autre tangente étant équiangulaire avec la polaire).

Cette double définition implique celles de la *distance de deux points* A et D et de l'*angle de deux droites* a et d. Ceci posé, la corrélation suivante devient évidente :

Le point Lemoinien L est le point tel que la somme des carrés de ses *distances aux côtés* soit minimum et égale à

$$\frac{4s^2}{a^2+b^2+c^2},$$

$2s$ étant un *nombre,* ou *produit segmentaire* de la distance a des deux sommets B et C par la la distance h_a du sommet A à a.

La droite Longchampsienne l est telle que la somme des carrés de ses *angles avec les sommets* soit minimum et égale à

$$\frac{4S^2}{A^2+B^2+C^2},$$

$2S$ étant un *nombre* ou *produit angulaire* de l'angle A des deux côtés b et c par l'angle H_A du côté a et du sommet A.

De tels exercices de traduction sont très faciles. Quand on se sera familiarisé avec eux, le vœu de Gergonne, la *Géométrie en partie double,* sera complètement réalisé.

Les difficultés de détail qui peuvent paraître subsister s'aplaniront vite. Elles tiendront presque toujours à la nécessité de rectifier, puis de généraliser, l'énoncé que l'on veut transformer.

Si, par exemple, on veut dualiser le théorème du *cercle orthoptique,* ainsi énoncé : le lieu des points *d'où l'on voit* une conique à centre sous un angle droit est un cercle concentrique, on trouvera des difficultés qui disparaîtront si l'on revient purement et simplement à l'énoncé de Monge. C'est ce que montrent les deux théorèmes suivants, qui, les mêmes notations conservées, présentent sous une seconde face la question 1141 de M. Grip :

1° *Le lieu des points desquels on peut mener un triple de plans tangents à une quadrique* Q *et conjugués par rapport à une autre quadrique* Σ *est une quadrique* Σ′ $\left(\sum \frac{X^2}{L} - \sum \frac{A}{L} = 0\right)$, *concentrique à* Q *et homothétique à* Σ.

2° *L'enveloppe des plans contenant un triple de points d'une quadrique* Q *conjugués par rapport à une autre quadrique* Σ *est une quadrique* Σ′ $\left(\sum \frac{U^2}{L} - \sum \frac{A}{L} = 0\right)$, *conpolaire à* Q *et homotangente à* Σ. (*Voir* deuxième Partie.)

DEUXIÈME PARTIE.

INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE DU TÉTRAÈDRE.

Préliminaires.

La Géométrie du triangle doit avoir pour conséquence, tôt ou tard, la *Géométrie du tétraèdre;* mais cette Géométrie est très difficile à établir. C'est ce que constate M. Neuberg dans son beau *Mémoire sur le tétraèdre* (Hayez, Bruxelles; 1884), où il dit notamment : « Parfois, les analogies entre le triangle et le tétraèdre sont peu apparentes et même manquent complètement. » Notre opinion, la même sur les difficultés, est différente sur leurs causes. Nous allons essayer de la justifier.

Du triangle au tétraèdre, les correspondances, loin de manquer, sont si nombreuses et si variées qu'elles se dédoublent, s'enchevêtrent, se superposent, et, comme les couleurs du spectre, semblent finalement produire le défaut. Au triple des sommets du triangle correspondent à la fois le quadruple des sommets du tétraèdre et le sextuple de ses arêtes. Au triple des côtés correspondent le quadruple des faces et encore le sextuple des arêtes. Au triple des angles correspondent le quadruple des trièdres (et par conséquent le dodécuple des angles plans) et le sextuple des dièdres. Et chaque trièdre se dédouble, selon qu'on le considère comme constitué par ses faces ou par ses arêtes (*voir* Chap. II, § 3).

On ne peut aborder la Géométrie du tétraèdre qu'en adoptant de bonnes bases, dont les premières sont : une notation rationnelle, un système de coordonnées approprié, une comparaison minutieuse des conditions dans lesquelles se présente le tétraèdre avec celles dans lesquelles s'est présenté le triangle. Ce sera le but de cette Introduction.

Nous admettons comme acquis tout ce qui est élémentaire ou connu et que résument le *Mémoire* précité et la *Note sur la Géo-*

métrie récente du tétraèdre, de M. Neuberg [1], insérée au tome II du *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse.

Notation.

La justification d'une notation est impossible à faire et inutile à entreprendre *a priori*. Un auteur a, pour l'adopter, des motifs qui résultent de l'ensemble de ses études; mais le Lecteur (c'est-à-dire *tout le monde*) n'est disposé à trouver simple qu'une notation à laquelle il est habitué.

Au contraire, la justification se trouve faite d'elle-même *a posteriori* si le Lecteur, ayant surmonté une difficulté moins grande peut-être qu'il ne l'avait craint, est amené à reconnaître que la notation adoptée a apporté, dans un sujet difficile, la simplification et la clarté, parfois même rendu une étude possible.

Nous nous bornerons donc à *expliquer* notre notation.

La principale difficulté consiste à établir une correspondance entre la notation du quadruple et celle du sextuple. Les éléments du sextuple provenant de la combinaison deux à deux de ceux du quadruple, la notation *à deux indices* s'impose pour les arêtes et les dièdres.

Si l'on désigne par S_1, S_2, S_3, S_4 les quatre sommets, l'arête S_1S_2 sera bien désignée par A_{12}. De même que, par convention usuelle, S_1 représente à la fois le *sommet* et le *trièdre* 1, de même, A_{12} désignera à la fois l'*arête* 1-2 et le *dièdre* correspondant. D'où résulteront d'autres conséquences : s_1, s_2, s_3, s_4 seront les *aires* des faces opposées à S_1, S_2, S_3, S_4 et les *plans* de ces faces; a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34} seront les *longueurs* des arêtes A_{12}, ..., A_{34} et les *droites* elles-mêmes.

---

[1] Nous désignerons cette Note de M. Neuberg par l'abréviation (*Neub.*).

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS DESCRIPTIVES.

Éléments remarquables absolus.

Nous désignerons par G le *barycentre du volume* du tétraèdre, par G_1, G_2, G_3, G_4 les *barycentres des aires* des faces. Les coordonnées barycentriques de G sont (1, 1, 1, 1). g_1, g_2, g_3, g_4 seront les plans menés par les sommets, parallèlement aux faces. Ils forment un tétraèdre $G'_1G'_2G'_3G'_4$, *complémentaire* du tétraèdre $S_1S_2S_3S_4$. Les sommets G'_1 (ou $g_2g_3g_4$, dont les coordonnées sont — 2, 1, 1, 1), G'_2, G'_3, G'_4 sont les quatre *points adjoints* à G. S_1G_1, S_2G_2, S_3G_3, S_4G_4 sont les *médianes*, passant toutes par G et respectivement par G'_1, G'_2, G'_3, G'_4. $G_1G_2G_3G_4$ est le *tétraèdre pédal* du barycentre; ses faces ($G_1G_2G_3$ ou g'_1, g'_2, g'_3, g'_4) sont les *pédales* de ce point.

Cet ensemble d'éléments (abstraction faite des longueurs, aires ou mesures d'angles) constitue les éléments *descriptifs* ou *remarquables absolus* du *tétraèdre absolu,* ou considéré isolément. Tous autres éléments sont *métriques* (ou quasimétriques) et *remarquables relatifs;* ils dépendent de l'*association* du tétraèdre avec une *sphère* (ou une quadrique).

Coordonnées barycentriques.

La nécessité de l'emploi des *coordonnées barycentriques*, prenant pour origine le point remarquable absolu, est plus grande encore pour le tétraèdre que pour le triangle. Un grand avantage est le suivant :

Considérons, avec le tétraèdre $S_1S_2S_3S_4$, un point arbitraire D; la *cévienne* S_1D coupant le plan s_1 en D_1. Dans le système *normal* (ou tout autre), D aurait des coordonnées d_1, d_2, d_3, d_4; D_1 aurait, *par rapport au triangle de référence* $S_2S_3S_4$, des coordonnées d'_2,

d'_3, d'_4 qui seraient essentiellement différentes de d_2, d_3, d_4. Mais, si δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 sont les coordonnées *barycentriques* de D, celles de D_1, par rapport au triangle de référence $S_2S_3S_4$, resteront δ_2, δ_3, δ_4. Car, les tétraèdres $S_1D_1S_3S_4$, $S_1D_1S_4S_2$, $S_1D_1S_2S_3$, ayant même hauteur, sont respectivement proportionnels aux aires de leurs bases.

Nous désignerons les coordonnées *ponctuelles* courantes par P_1, P_2, P_3, P_4, et les coordonnées *tangentielles* correspondantes par T_1, T_2, T_3, T_4. La nécessité de l'emploi d'une seule lettre pourvue de quatre indices (au lieu de X, Y, Z, T ou U, V, W, R) s'impose ici comme *partout.*

Généralités sur les quadriques.

Nous prendrons l'équation générale des quadriques sous la forme

$$(Q)\quad \left\{\begin{aligned} F(P_1, P_2, P_3, P_4) = {} & A_1P_1^2 + A_2P_2^2 + A_3P_3^2 + A_4P_4^2 \\ & + 2B_{12}P_1P_2 + 2B_{13}P_1P_3 + 2B_{14}P_1P_4 \\ & + 2B_{23}P_2P_3 + 2B_{24}P_2P_4 + 2B_{34}P_3P_4 = 0. \end{aligned}\right.$$

En désignant par a_1, a_2, ..., b_{34} les mineurs du premier ordre correspondant aux coefficients successifs dans le discriminant H, savoir :

$$a_1 = A_2A_3A_4 + 2B_{34}B_{42}B_{23} - A_2B_{34}^2 - A_3B_{42}^2 - A_4B_{23}^2,$$
$$(B_{42} \equiv B_{24}, \ldots),$$
$$\begin{aligned} b_{12} = {} & A_3B_{41}B_{24} + A_4B_{12}B_{31} - A_3A_4B_{12} \\ & + B_{12}B_{34}^2 - B_{23}B_{34}B_{41} - B_{13}B_{42}B_{34}, \end{aligned}$$

les coordonnées du centre, solutions de $F'_{P_1} = F'_{P_2} = F'_{P_3} = F'_{P_4}$, sont :

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} & a_1 + b_{12} + b_{13} + b_{14}, \quad a_2 + b_{23} + b_{24} + b_{21}, \\ & a_3 + b_{34} + b_{31} + b_{32}, \quad a_4 + b_{41} + b_{42} + b_{43}. \end{aligned}\right.$$

Une quadrique appartient au *genre elliptique* [E, π (point), I], au *genre parabolique* [P_e, V (cylindres), P_h] ou au *genre hyperbolique* [H_2, K (cône), H_1] selon que l'on a

$$A(\Sigma a_1 + 2\Sigma b_{12}) \gtreqless 0 \qquad (A = A_1, A_2, A_3 \text{ ou } A_4).$$

Dans chaque genre, $H < 0$ correspond à la première espèce (E, P_e ou H_2), $H = 0$ à l'espèce de transition (π, V ou K), $H > 0$ à la deuxième espèce (I, P_h ou H_1).

La *quadrique corrélative* de Q $[F(T_1, T_2, T_3, T_4) = 0]$ a pour équation *ponctuelle*

$$(Q') \qquad \Phi(P_1, P_2, P_3, P_4) = \Sigma a_1 P_1^2 + 2\Sigma b_{12} P_1 P_2 = 0.$$

Elle est du genre elliptique, parabolique ou hyperbolique selon que l'on a

$$a(\Sigma A_1 + 2\Sigma B_{12}) \gtreqless 0 \qquad (a = a_1,\ a_2,\ a_3 \text{ ou } a_4).$$

Les coordonnées du centre, solutions de $\Phi'_{P_1} = \Phi'_{P_2} = \Phi'_{P_3} = \Phi'_{P_4}$, sont

$$(c') \qquad \begin{cases} A_1 + B_{12} + B_{13} + B_{14}, & A_2 + B_{23} + B_{24} + B_{21}, \\ A_3 + B_{34} + B_{31} + B_{32}, & A_4 + B_{41} + B_{42} + B_{43}, \end{cases}$$

Ce point (c'), dont les coordonnées ne dépendent que des coefficients de l'équation de Q, sera dit le *centre corrélatif* de la quadrique Q.

Quadriques remarquables absolues.

Parmi les *quadriques remarquables absolues,* c'est-à-dire dont la définition ne dépend que des éléments absolus, nous citerons :

1° Le *premier ellipsoïde de Steiner* ([1]), qui a son centre en G, est circonscrit au tétraèdre, les plans tangents aux sommets étant les faces g_1, g_2, g_3, g_4 du tétraèdre complémentaire. Son équation est $\Sigma P_1 P_2 = 0$.

2° Le *deuxième ellipsoïde de Steiner,* ayant son centre en G et tangent aux quatre faces, les points de contact étant les barycentres G_1, G_2, G_3, G_4 de ces faces. Son équation est

$$\Sigma P_1^2 - \Sigma P_1 P_2 = 0.$$

3° Le *troisième ellipsoïde de Steiner,* ayant son centre en G et tangent aux six arêtes en leur point moyen. Son équation est

$$\Sigma P_1^2 - 2\Sigma P_1 P_2 = 0.$$

Le premier et le second ellipsoïde sont corrélatifs ; le troisième

---

([1]) Steiner n'a pas étudié ces ellipsoïdes; mais nous donnerons, autant que possible et par convention, aux éléments du tétraèdre les noms correspondants admis pour les éléments connus du triangle. D'ailleurs, cette attribution de noms est légitime ; si Steiner n'avait pas pensé aux ellipses, il n'est pas probable que l'on eût pensé aux ellipsoïdes.

est corrélatif de lui-même ; c'est la seule quadrique qui jouisse de cette propriété. Les relations de ces ellipsoïdes avec les sphères circonscrites, pédale et inscrites sont à étudier.

4° Les quatre *paraboloïdes elliptiques de Artzt ;* le premier Π_1, dont l'équation est

$$(\Pi_1) \qquad P_1^2 - 3(P_2 P_3 + P_2 P_4 + P_3 P_4) = 0,$$

étant tangent en S_2, S_3, S_4, aux trois arêtes A_{12}, A_{13}, A_{14}, la médiane de S_1 étant direction diamétrale. Son centre corrélatif est le point $(1, -1, -1, -1)$.

Remarque. — Dans un triangle $S_1 S_2 S_3$, étudier le cercle $(S_1 S_2 S_3)$ circonscrit à ce triangle, le cercle $(G_1 G_2 G_3)$ circonscrit au triangle pédal, le cercle $(G'_1 G'_2 G'_3)$ circonscrit au triangle complémentaire, c'est *géométriquement* la même chose.

Toute propriété trouvée sur l'un peut être *reportée* sur les autres [1]. Si cette observation simple avait été faite plus tôt, Steiner aurait signalé, *en même temps* que son point sur le cercle circonscrit, le centre de Kiépert sur le cercle d'Euler où il semble être resté inaperçu.

Or, la sphère circonscrite au tétraèdre *de référence* $S_1 S_2 S_3 S_4$ est nécessairement plus simple à étudier que les sphères circonscrites aux tétraèdres $G_1 G_2 G_3 G_4$ ou $G'_1 G'_2 G'_3 G'_4$ *non de référence.* L'observation qui précède pourra donc être utilisée en Géométrie du tétraèdre (*voir* Chap. II).

Bases de correspondance.

Nous conviendrons dorénavant de dire qu'un triangle *abc* est une courbe du troisième ordre ou *cubique rectiligne*, et qu'un triangle ABC est une courbe de troisième classe ou *cubique ponctuée.* Un *point* D et son *axe* δ seront dits *conjugués par rapport à ces cubiques.*

Dans un tétraèdre, nous considérerons un trièdre (système de trois plans à sommet) comme une *développable cubique planaire* dont la corrélative (ou correspondante) est la *cubique ponctuée* de

---

(1) Ces *reports* sont très faciles. Si l'on considère trois points homologues dans les cercles (G), (S), (G'), le premier est le *complémentaire* et le troisième l'*anticomplémentaire* du second.

la face opposée. Au couple *du point et de la droite,* considéré dans un triangle, correspondent, pour un tétraèdre, deux couples que nous examinerons successivement : 1° le couple *du point et du plan,* analogue au précédent ; 2° le couple *de la droite et de la droite,* la corrélative d'une droite (de jonction) étant une droite (d'intersection), et réciproquement.

Relations du tétraèdre *absolu* avec le couple *point et plan.*

Étant donné le tétraèdre $S_1S_2S_3S_4$, soit $D(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ ou $\Sigma\delta_1T_1 = 0)$ un *point* arbitraire de l'espace. Il détermine quatre *céviennes de jonction*

$$S_1D\left(\frac{P_2}{\delta_2} = \frac{P_3}{\delta_3} = \frac{P_4}{\delta_4}\right),$$

S_2D, S_3D, S_4D, dont les intersections avec les faces sont : $D_1(\delta_2T_2 + \delta_3T_3 + \delta_4T_4 = 0)$, D_2, D_3, D_4, et, par suite, le *tétraèdre pédal* $D_1D_2D_3D_4$, la *pédale* $D_2D_3D_4$ ou p'_1 ayant pour équation

$$2\frac{P_1}{\delta_1} - \frac{P_2}{\delta_2} - \frac{P_3}{\delta_3} - \frac{P_4}{\delta_4} = 0.$$

L'*axe* conjugué de D_1, dans le plan s_1, par rapport à la *cubique ponctuée* $S_2S_3S_4$, a pour équations

$$P_1 = 0, \qquad \frac{P_2}{\delta_2} + \frac{P_3}{\delta_3} + \frac{P_4}{\delta_4} = 0.$$

Nous appellerons *plan conjugué de la cévienne* S_1D *par rapport au trièdre* S_1 le plan

$$\frac{P_2}{\delta_2} + \frac{P_3}{\delta_3} + \frac{P_4}{\delta_4} = 0$$

Étant donné le tétraèdre $s_1s_2s_3s_4$, soit $p\,(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ ou $\Sigma\delta_1P_1 = 0)$ un *plan* arbitraire de l'espace. Il détermine quatre *céviennes d'intersection*

$$s_1p\left(\frac{T_2}{\delta_2} = \frac{T_3}{\delta_3} = \frac{T_4}{\delta_4}\right),$$

s_2p, s_3p, s_4p, dont les jonctions avec les sommets sont : $p_1(\delta_2P_2 + \delta_3P_3 + \delta_4P_4 = 0)$, p_2, p_3, p_4, et, par suite, le *tétraèdre pédal* $p_1p_2p_3p_4$, le *pédal* $p_2p_3p_4$ ou D'_1 ayant pour équation

$$2\frac{T_1}{\delta_1} - \frac{T_2}{\delta_2} - \frac{T_3}{\delta_3} - \frac{T_4}{\delta_4} = 0.$$

L'*axe* conjugué de p_1, au point S_1, par rapport à la *cubique planaire* $s_2s_3s_4$ a pour équations

$$T_1 = 0, \qquad \frac{T_2}{\delta_2} + \frac{T_3}{\delta_3} + \frac{T_4}{\delta_4} = 0.$$

Nous appellerons *point conjugué de la cévienne* s_1p *par rapport à la face* s_1 le point

$$\frac{T_2}{\delta_2} + \frac{T_3}{\delta_3} + \frac{T_4}{\delta_4} = 0$$

mené par le sommet S_1 et l'axe conjugué de D_1 par rapport à S_1 ; nous dirons, par abréviation, que ce plan est *conjugué de* D *par rapport à* S_1.

Les quatre plans conjugués de D par rapport à S_1, S_2, S_3, S_4 forment un tétraèdre $D'_1 D'_2 D'_3 D'_4$, *complémentaires de* $S_1 S_2 S_3 S_4$ *par rapport à* D, et dont les sommets

$$D'_1\left(\frac{2T_1}{\delta_1} - \frac{T_2}{\delta_2} - \frac{T_3}{\delta_3} - \frac{T_4}{\delta_4} = 0\right),$$

D'_2, D'_3, D_4 sont les quatre *points adjoints* à D ; D'_1 est corrélatif de p'_1.

Les tétraèdres $S_1 S_2 S_3 S_4$, $D_1 D_2 D_3 D_4$, $D'_1 D'_2 D'_3 D'_4$, homologiques deux à deux avec *même* centre D, ont un *même* plan d'homologie p dont l'équation est

$$\frac{P_1}{\delta_1} + \frac{P_2}{\delta_2} + \frac{P_3}{\delta_3} + \frac{P_4}{\delta_4} = 0,$$

et que nous nommerons le *plan central* correspondant au point D.

Aux points adjoints D'_1, D'_2, D'_3, D'_4 correspondent les *plans centraux adjoints* p'_1, p'_2, p'_3, p'_4.

(D, D'_1, D'_2, D'_3, D'_4), ($p, p'_1, p'_2, p'_3, p'_4$) forment respectivement des *quintuples* où aucun élément ne peut être dit principal.

La réunion de tous ces éléments constitue, pour le point D, un *ensemble* analogue à celui des éléments absolus correspon-

d'intersection de la face s_1 et de l'axe conjugué de p_1 par rapport à s_1, et nous dirons, par abréviation, que ce point est *conjugué de* p *par rapport à* s_1.

Les quatre points conjugués de p par rapport à s_1, s_2, s_3, s_4, forment un tétraèdre $p'_1 p'_2 p'_3 p'_4$, *complémentaire de* $s_1 s_2 s_3 s_4$ *par rapport à* p, et dont les faces

$$p'_1\left(2\frac{P_1}{\delta_1} - \frac{P_2}{\delta_2} - \frac{P_3}{\delta_3} - \frac{P_4}{\delta_4} = 0\right),$$

p'_2, p'_3, p'_4 sont les quatre *plans adjoints* à p ; p'_1 est corrélatif de D'_1.

Les tétraèdres $s_1 s_2 s_3 s_4$, $d_1 d_2 d_3 d_4$, $d'_1 d'_2 d'_3 d'_4$, homologiques deux à deux avec *même* plan d'homologie p, ont un *même* centre D dont l'équation est

$$\frac{T_1}{\delta_1} + \frac{T_2}{\delta_2} + \frac{T_3}{\delta_3} + \frac{T_4}{\delta_4} = 0,$$

et que nous nommerons le *point central* correspondant au plan p.

Aux plans adjoints $p'_1 p'_2 p'_3 p'_4$ correspondent les *points centraux adjoints* D'_1, D'_2, D'_3, D'_4.

($p, p'_1, p'_2, p'_3, p'_4$), (D, D'_1, D'_2, D'_3, D'_4) forment respectivement des *quintuples,* où aucun élément n'est principal.

La réunion de tous ces éléments constitue, pour le plan p, un *ensemble* analogue à celui des éléments absolus correspon-

dant au barycentre G dont le plan central est le plan de l'infini i.

dant au plan de l'infini i, dont le point central est le barycentre G.

Il est visible que les conséquences que l'on a tirées pour le triangle des propositions similaires de celles qui précèdent s'étendront au tétraèdre.

Relations du tétraèdre *associé* **avec le couple** *point et plan.*

Voici ce qu'indique la correspondance du plan à l'espace. Par le mot *indiquer*, nous entendons que, si nous ne démontrons pas, dans cette brève Introduction, toutes les propositions énoncées ci-après, nous nous réservons de les démontrer plus tard, mais qu'il est facile de prévoir leur exactitude logique.

On appelle *quadriques homothétiques* toutes les quadriques qui ont une courbe commune du deuxième ordre (r. ou i.) dans le plan $i(\Sigma P_1 = o)$.

Toutes ces quadriques sont assujetties à cinq conditions ; il n'en faut que *quatre* pour en déterminer une.

Le problème : *Inscrire à un tétraèdre donné des quadriques d'espèce homothétique donnée,* comporte, en général, huit solutions (r. ou i.).

En disposant de l'*espèce homothétique,* on peut faire en sorte qu'une de ces quadriques ait pour centre un point donné D. Nous appellerons cette quadrique *quadrique* D.

On démontrera que les plans conjugués des céviennes (de jonction) de D, par rapport aux trièdres (ou cubiques planaires)

On appellera *quadriques homotangentes* toutes les quadriques circonscrites à un même cône de deuxième classe (r. ou i.), ayant son sommet en $G(\Sigma T_1 = o)$.

Toutes ces quadriques sont assujetties à cinq conditions ; il n'en faut que *quatre* pour en déterminer une.

Le problème : *Circonscrire à un tétraèdre donné des quadriques d'espèce homotangente donnée,* comporte, en général, huit solutions (r. ou i.).

En disposant de l'*espèce homotangente,* on peut faire en sorte qu'une de ces quadriques ait pour plan polaire du barycentre un plan donné p. Nous l'appellerons *quadrique* p.

On démontrera que les points conjugués des céviennes (d'intersection) de p, par rapport aux faces (ou cubiques ponctuées)

S_1, S_2, S_3, S_4 sont également conjugués de ces céviennes par rapport à la quadrique D. On pourra alors faire abstraction des cubiques planaires et ne plus considérer que la quadrique D qui devient *quadrique de base ponctuelle*.

Sur ce fondement, on pourra établir toute une géométrie *quasi-métrique segmentaire,* etc.

s_1, s_2, s_3, s_4 sont également conjuguées de ces céviennes par rapport à la quadrique p. On pourra alors faire abstraction des cubiques ponctuées et ne plus considérer que la quadrique p qui devient *quadrique de base tangentielle*.

Sur ce fondement, on pourra établir toute une géométrie *quasi-métrique angulaire,* etc.

Quadruples hyperboloïdiques.

On appelle *quadruple hyperboloïdique* l'ensemble de quatre droites, génératrices, d'un même système, d'un hyperboloïde. Nous appellerons *centre du quadruple* le centre de cet hyperboloïde.

Le premier quadruple reconnu a été celui des *hauteurs*. Le tétraèdre général n'a pas d'*orthocentre proprement dit;* par suite, dans son étude, on substitue à la considération de l'orthocentre celle de l'*hyperboloïde des hauteurs*. C'est un point de vue; mais l'orthocentre d'un triangle n'est pas seulement le centre d'un triple concourant; c'est un point jouissant de nombreuses propriétés. Il y aura lieu d'examiner si le centre de l'hyperboloïde, qui est son point *remarquable absolu* et le centre du quadruple, ne jouit pas, en totalité ou en partie, de propriétés analogues à celles de l'orthocentre du triangle, et ne mériterait pas, à beaucoup d'égards, le nom d'*orthocentre du tétraèdre* (*voir* Chap. II).

M. Neuberg a signalé un grand nombre d'autres quadruples. Il a démontré, par exemple, que *les quatre droites menées des sommets aux points de Lemoine des faces opposées forment un quadruple hyperboloïdique* (Neub.).

En d'autres termes, les quatre droites, menées des sommets S_1, S_2, S_3, S_4 aux points des faces opposées dont les coordonnées *triangulaires* sont $(a_{34}^2, a_{42}^2, a_{23}^2)$, $(a_{41}^2, a_{13}^2, a_{34}^2)$, $(a_{12}^2, a_{24}^2, a_{41}^2)$, $(a_{23}^2, a_{31}^2, a_{12}^2)$, forment un quadruple. Or, la propriété suivante est évidente : les quatre droites menées de S_1, S_2, S_3, S_4 aux points des faces dont les coordonnées *tétraédriques* sont (o, s_2^2, s_3^2, s_4^2), (s_1^2, o, s_3^2, s_4^2), ..., concourent au point $L(s_1^2, s_2^2, s_3^2, s_4^2)$. Il n'y a

aucun désaccord entre les deux propriétés; c'est simplement un fait de *dédoublement*. Il paraît probable que le centre du *quadruple de Neuberg* est le point L.

Si cette propriété était reconnue pour le point L, qui est déjà le point dont les distances aux faces sont proportionnelles à leurs aires, et, ainsi que M. Neuberg l'a démontré, le point du minimum $\left(\frac{9V^2}{\Sigma s_1^2}\right)$ de la somme des carrés des distances aux faces, et l'inverse du barycentre (Neub.), qui jouit certainement de beaucoup d'autres propriétés du point de Lemoine, ce point, et plus généralement le point quasimétrique correspondant, serait légitimement et commodément nommé le *point Lemoinien du tétraèdre* (1).

Un tétraèdre donne naissance à *une infinité* de quadruples hyperboloïdiques. En effet, si l'on imagine d'abord que quatre droites sont menées *arbitrairement* par les sommets, elles n'ont en général aucune relation; trois quelconques d'entre elles déterminent un hyperboloïde auquel n'appartient pas la quatrième. Mais, si ces quatre droites ont été menées *d'après la même loi,* par rapport *à la même* figure déterminée (le tétraèdre, associé au besoin à *la même* quadrique déterminée), elles ont nécessairement *une relation géométrique déterminée,* et cette relation ne peut être que la situation de la quatrième droite sur l'hyperboloïde déterminé par les trois autres. C'est le cas général, dans lequel rentre, comme cas particulier, celui où, l'hyperboloïde tendant à devenir cône ou cylindre, les quatre droites tendent à devenir concourantes ou parallèles.

A ces considérations nous ajouterons le théorème suivant :

THÉORÈME. — 1° *Si trois droites concourantes du plan ont pour similaires, dans l'espace, quatre droites non concourantes, ces quatre droites forment, en général, un quadruple hyperboloïdique;* 2° *si trois points en ligne droite, provenant de trois*

---

(1) Du point Lemoinien dérive son réciproque $\left(\frac{1}{s_1^2}, \frac{1}{s_2^2}, \frac{1}{s_3^2}, \frac{1}{s_4^2}\right)$ et trois isobariques $\left(\frac{1}{s_2^2}, \frac{1}{s_3^2}, \frac{1}{s_4^2}, \frac{1}{s_1^2}\right)$, $\left(\frac{1}{s_3^2}, \frac{1}{s_4^2}, \frac{1}{s_1^2}, \frac{1}{s_2^2}\right)$, $\left(\frac{1}{s_4^2}, \frac{1}{s_1^2}, \frac{1}{s_2^2}, \frac{1}{s_3^2}\right)$. Ce sont les *points Brocardiens du tétraèdre;* ils sont à étudier, comme les *points Jérabiens*, isobariques de $\left(\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \frac{1}{s_3}, \frac{1}{s_4}\right)$, etc.

couples de droites du plan, ont pour similaires, dans l'espace, quatre droites résultant de quatre couples de plans et non situées dans un même plan, ces quatre droites forment, en général, un quadruple hyperboloïdique.

C'est un théorème *de fait,* non susceptible d'une démonstration proprement dite, mais d'une telle généralité d'application que l'on ne saurait lui trouver une exception qui ne soit explicable.

Les exemples à l'appui abondent (théorème de l'hyperboloïde des hauteurs et son corrélatif; extensions données par Chasles aux théorèmes de Pascal et de Brianchon; triangles et tétraèdres homologiques; tous les quadruples signalés par M. Neuberg et tous autres que l'on pourra étudier).

Relations d'un tétraèdre avec le couple *droite et droite.*

La base de l'étude de ces relations nous paraît être la suivante :

Étant donné un tétraèdre $S_1S_2S_3S_4$ *et une droite d, les* plans de jonction

$$(S_1 d,\ S_2 d,\ S_3 d,\ S_4 d)$$

de cette droite avec les sommets coupent les faces s_1, s_2, s_3, s_4 *suivant les quatre droites d'un quadruple hyperboloïdique.*

Étant donné un tétraèdre $s_1s_2s_3s_4$ *et une droite d, les* points d'intersection

$$(s_1 d,\ s_2 d, s_3 d,\ s_4 d)$$

de cette droite avec les faces, joints aux sommets S_1, S_2, S_3, S_4, *déterminent les quatre droites d'un quadruple hyperboloïdique.*

Ce double théorème est démontré si l'on admet le précédent; sa démonstration directe n'est pas difficile. Les centres de quadruples seront des points intéressants à étudier. Aux quatre droites du premier quadruple correspond, dans les faces, un quadruple de points conjugués par rapport aux cubiques ponctuées $S_2S_3S_4$, ...; ces quatre points, joints aux sommets, détermineront un *quadruple hyperboloïdique conjugué* du premier. Aux quatre droites du second quadruple correspond un quadruple de plans conjugués par rapport aux cubiques planaires $s_2s_3s_4$, ...; les intersections de ces quatre plans avec les faces détermineront un *quadruple hyperboloïdique conjugué;* etc.

Telles sont les bases principales des propriétés *descriptives* du tétraèdre. Dans les études de détail, les faits suivants ne doivent pas être perdus de vue :

1° Aux *distances* de deux points, d'un point et d'un plan, d'un point et d'une droite, de deux droites, *définies comme rapports* de deux longueurs métriques, correspondent logiquement les *angles* de deux plans, d'un plan et d'un point, d'un plan et d'une droite, de deux droites, *définis comme rapports* de deux sinus métriques. C'est une question sans difficulté, si l'on se reporte à ce qui a été dit à la première Partie.

2° La possibilité de généralisation ou transformation *par traduction* est partout : traduction correspondante du plan à l'espace, traduction homographique de la sphère à la quadrique, traduction corrélative des propriétés ponctuelles en tangentielles, et réciproquement. La difficulté n'est pas d'ailleurs dans la traduction même; elle réside entièrement dans une opération préalable qui consiste à *rendre un énoncé apte à être traduit*.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES.

---

§ 1. — CIRCONSCRIPTION ET INSCRIPTION DE SPHÈRES.

Problème-lemme.

Étant donnée l'équation $\Sigma a_{12}^2 P_1 P_2 = 0$ *du cercle* O *circonscrit au triangle* $S_1 S_2 S_3$, *trouver l'équation du cercle pédal (ou d'Euler)* $(G_1 G_2 G_3)$, *et celle du cercle complémentaire* $(G'_1 G'_2 G'_3)$ (1).

---

(1) Nous désignerons le côté $S_2 S_3$ d'un triangle par s_1 quand il sera considéré comme opposé à S_1, et par a_{23} quand il sera considéré comme jonction de S_2 et S_3 ($s_1 \equiv a_{23}$).

A tout point du cercle $(S_1S_2S_3)$ correspond, dans $(G_1G_2G_3)$, son complémentaire. Les formules de transformation sont

$$p_1 = P_2 + P_3, \qquad p_2 = P_3 + P_1, \qquad p_3 = P_1 + P_2,$$

d'où (à un facteur près)

$$P_1 = p_2 + p_3 - p_1, \qquad P_2 = p_3 + p_1 - p_2, \qquad P_3 = p_1 + p_2 - p_3.$$

L'équation du cercle pédal est donc

$$\Sigma a_{12}^2 (P_2 + P_3 - P_1)(P_3 + P_1 - P_2) = 0$$

ou

$$\Sigma (a_{12}^2 + a_{13}^2 - a_{23}^2) P_1^2 - 2 \Sigma a_{12}^2 P_1 P_2 = 0.$$

A tout point remarquable de $(S_1S_2S_3)$ correspond un point remarquable complémentaire sur $(G_1G_2G_3)$; à tout point remarquable de $(G_1G_2G_3)$ correspond un point remarquable anticomplémentaire sur $(S_1S_2S_3)$.

L'équation du cercle complémentaire $(G'_1G'_2G'_3)$ de $(S_1S_2S_3)$ est

$$\Sigma a_{12}^2 (P_2 + P_3)(P_3 + P_1) = 0$$

ou

$$\Sigma a_{23}^2 P_1^2 + (a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2) \Sigma P_1 P_2 = 0,$$

avec la même observation sur la correspondance des points. Le centre du cercle complémentaire est l'orthocentre H de $S_1S_2S_3$; son centre corrélatif est le point $2a_{23}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2, \ldots$, complémentaire du centre corrélatif du cercle pédal (point de Lemoine a_{23}^2, a_{13}^2, a_{12}^2).

Sphère circonscrite $(S_1S_2S_3S_4)$.

L'équation de la sphère circonscrite au tétraèdre $S_1S_2S_3S_4$ est

$$a_{12}^2 P_1 P_2 + a_{13}^2 P_1 P_3 + a_{14}^2 P_1 P_4 + a_{23}^2 P_2 P_3 + a_{24}^2 P_2 P_4 + a_{34}^2 P_3 P_4 = 0.$$

Nous poserons (¹)

$$a_{12}a_{34} = k_2, \qquad a_{13}a_{24} = k_3, \qquad a_{14}a_{23} = k_4, \qquad k_2 + k_3 + k_4 = 2K.$$

D'après les formules (c) du Chap. I, le centre O de $(S_1S_2S_3S_4)$

(¹) Pour retenir ces formules et celles que l'on trouvera plus loin pour les dièdres (§ 2), il faut se rappeler que k_p est le produit de a_{1p} par l'arête opposée.

est au point

$$(O)\quad \begin{cases} o_1 = 2a_{34}^2 a_{24}^2 a_{23}^2 + a_{34}^2(k_3^2 + k_4^2 - k_2^2) \\ \qquad + a_{24}^2(k_2^2 + k_4^2 - k_3^2) + a_{23}^2(k_2^2 + k_3^2 - k_4^2), \\ o_2 = 2a_{13}^2 a_{14}^2 a_{34}^2 + \ldots, \quad o_3 = 2a_{12}^2 a_{14}^2 a_{24}^2 + \ldots, \quad o_4 = 2a_{12}^2 a_{13}^2 a_{23}^2 + \ldots. \end{cases}$$

Le rayon de cette sphère est, d'après la formule de von Staudt (Neub.)

$$R = \frac{1}{6V}\sqrt{K(K-k_2)(K-k_3)(K-k_4)}.$$

Le centre corrélatif est le point très remarquable

$$a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2, \quad a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{21}^2,$$
$$a_{34}^2 + a_{31}^2 + a_{32}^2, \quad a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2.$$

Sphère pédale $(G_1G_2G_3G_4)$.

La sphère $(G_1G_2G_3G_4)$, homothétique à $(S_1S_2S_3S_4)$, G étant le centre d'homothétie et $\frac{1}{3}$ le rapport d'homothétie, a pour rayon $\frac{R}{3}$.

Chacun de ses points est le complémentaire du point homologue dans $(S_1S_2S_3S_4)$. Il faut donc employer les formules de transformation

$$p_1 = P_2 + P_3 + P_4, \qquad p_2 = P_3 + P_4 + P_1, \qquad \ldots,$$

d'où (à un facteur près)

$$P_1 = p_2 + p_3 + p_4 - 2p_1, \qquad \ldots.$$

L'équation cherchée est, par suite,

$$\Sigma a_{12}^2(P_2 + P_3 + P_4 - 2P_1)(P_3 + P_4 + P_1 - 2P_2) = 0.$$

ou, en développant,

$$\Sigma[2(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2) - (a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2)]P_1^2$$
$$- \Sigma[5a_{12}^2 + 2a_{34}^2 - (a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2)]P_1P_2 = 0.$$

Le centre est au point

$$o_2 + o_3 + o_4, \quad o_3 + o_4 + o_1, \quad \ldots.$$

Le centre corrélatif est au point

$$\Sigma(5a_{12}^2 - a_{34}^2), \quad \ldots.$$

On remarquera que ce point n'est pas l'anticomplémentaire du centre corrélatif de la sphère circonscrite, qui est $\Sigma(a_{12}^2 - a_{34}^2)$, ...

Sphère complémentaire $(G'_1G'_2G'_3G'_4)$.

La sphère complémentaire a pour rayon 3R. Ses points sont les anticomplémentaires des points homologues de la sphère circonscrite. Son équation est

$$\Sigma a_{12}^2(P_2 + P_3 + P_4)(P_3 + P_4 + P_1) = 0,$$

ou

$$\Sigma(a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2)P_1^2 + 2\Sigma(a_{34}^2 + \Sigma a_{12}^2)P_1P_2 = 0.$$

Le centre est au point

$$o_2 + o_3 + o_4 - 2o_1, \quad \ldots.$$

Le centre corrélatif est

$$2(a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2) + 3\Sigma a_{12}^2, \quad \ldots,$$

point qui n'est pas le complémentaire du centre corrélatif de O, lequel est

$$[a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 + \Sigma a_{12}^2, \ \ldots].$$

Tout point remarquable qui pourra être signalé sur l'une des sphères $(S_1S_2S_3S_4)$, $(G_1G_2G_3G_4)$, $(G'_1G'_2G'_3G'_4)$, devra être *reporté* sur les deux autres à l'aide des formules de points complémentaires établies.

Rappel de propriétés du triangle.

Un triangle $s_1s_2s_3$ admet quatre cercles tangents, savoir : un cercle tangent intérieurement I, dit *cercle inscrit;* trois cercles tangents extérieurement I_1, I_2, I_3, situés dans les *angles tronqués* du triangle et dits *cercles ex-inscrits.*

Le centre de I est (s_1, s_2, s_3) et son rayon est $\frac{A}{p}$, A étant l'aire du triangle, $2p$ étant le périmètre. Le centre de I_1 est $(-s_1, s_2, s_3)$ et son rayon est $\frac{A}{p - s_1}\cdot$ (I, I_1, I_2, I_3) forment un quadruple de points associés. La ligne de deux centres quelconques $(II_1, I_2I_3, \ldots)$

passe par un sommet ($S_1, \ldots$), les points moyens étant situés sur le cercle circonscrit.

Les équations des cercles I, I_1, I_2, I_3 sont connues.

Un cercle remarquable, qui se rattache à ce quadruple est le cercle ($I_1 I_2 I_3$) ; son centre est le point de concours des perpendiculaires abaissées respectivement de I_1, I_2, I_3 sur s_1, s_2, s_3.

Sphères tangentes.

Le tétraèdre général $s_1 s_2 s_3 s_4$ admet huit sphères tangentes, savoir :

1° La sphère I, tangente intérieurement et dite *sphère inscrite ;* 2° quatre sphères I_1, I_2, I_3, I_4, dites *ex-inscrites,* tangentes extérieurement et situées dans les *trièdres tronqués* du tétraèdre ; 3° trois autres sphères J_1, J_2, J_3, également ex-inscrites, mais dans une situation essentiellement différente, que nous définirons plus loin ; on les appelle *sphères de combles.* Les cinq sphères inscrite et ex-inscrites sont toujours à distance finie ; les trois sphères de combles peuvent, dans certains cas particuliers, être rejetées à l'infini.

Les centres (I, I_1, I_2, I_3, I_4) forment un *quintuple* spécial de points associés. Les coordonnées de I sont (s_1, s_2, s_3, s_4) ; par suite, celles de $I_1(-s_1, s_2, s_3, s_4)$, etc. En posant $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 3S$, le rayon de I est $\frac{V}{S}$, celui de I_1 est $\frac{3V}{3S - 2s_1}$, ... Les coordonnées du centre d'une sphère S sont (s_1, s_2, $-s_3$, $-s_4$) et le rayon de cette sphère est

$$\frac{\pm 3V}{s_1 + s_2 - s_3 - s_4}.$$

Une propriété possible est que les points moyens (ou centres des moyennes distances) M_1, M_2, M_3, M_4, des triples de centres, tels que $I_2 I_3 I_4$, se trouvent sur la sphère circonscrite ($S_1 S_2 S_3 S_4$). En supposant cette propriété démontrée, il y aura lieu de vérifier s'il en est de même pour les points moyens N_{12}, N_{13}, N_{14}, N_{23}, N_{24}, N_{34} des six triples de centres tels que $I I_1 I_2$. La difficulté de ces vérifications est très grande ; elle tient à ce que l'équation de la sphère circonscrite a été établie en fonction des six arêtes, tandis que les équations de sphères tangentes (et, par suite, les coordonnées de

centres) s'établissent en fonction des faces. La question est subordonnée à celle, actuellement non résolue, de la constitution des *formules du tétraèdre,* sur laquelle nous reviendrons plus loin (§ 3).

Le point de contact de la sphère inscrite avec la face s_1, pied de la perpendiculaire abaissée de I sur cette face, est donné par

$$\frac{p_1}{0} = \frac{p_2}{s_2(1 - \cos A_{34})} = \frac{p_3}{s_3(1 - \cos A_{24})} = \frac{p_4}{s_4(1 - \cos A_{23})}.$$

En déterminant de même les points de contact sur s_2, s_3, s_4, il est facile de former l'équation de la sphère inscrite. On formera par le même procédé les équations des quatre sphères ex-inscrites.

L'équation de la sphère $(I_1 I_2 I_3 I_4)$ est également aisée à former, puisque l'on connaît quatre points de passage. Il y aura lieu d'examiner si le centre de cette sphère est, ou non, le point de concours des perpendiculaires abaissées de I_1, I_2, I_3, I_4 sur les quatre faces. Si ces quatre droites ne sont pas concourantes, elles formeront inévitablement un quadruple hyperboloïdique, et, selon toute vraisemblance, le centre de ce quadruple sera celui de la sphère $(I_1 I_2 I_3 I_4)$.

Un dièdre tel que A_{12} sépare l'espace en deux régions, la région *intérieure,* dirigée vers l'intérieur du tétraèdre, et la région *extérieure,* qui lui est opposée par l'arête et que l'on nomme *comble* du tétraèdre correspondant à l'arête a_{12}. Un tétraèdre a donc six combles ; mais il n'a qu'une seule sphère tangente pour les deux combles correspondant à deux arêtes opposées (a_{12} et a_{34} par exemple).

Sur la question des *sphères tangentes,* nous renvoyons : 1° au Traité Rouché-de Comberousse (t. II, App. du Liv. VII, et Note Neub.) ; 2° à divers Mémoires très intéressants de M. E. Lemoine, notamment ceux présentés à l'Association française. (Congrès de Marseille, 1891, et de Besançon, 1893.)

Dans ces Mémoires, M. Lemoine expose une méthode d'étude, dite de *transformation continue,* dont nous ne pouvons indiquer ici que le principe, mais qui pourra être d'un puissant secours lorsque l'on voudra approfondir la Géométrie du tétraèdre (comme d'ailleurs celle du triangle). La *transformation continue en* S_1 examine ce qui se passe lorsque la base s_1 d'un triangle (ou tétraèdre) restant fixe, le sommet S_1 se meut sur une perpendiculaire (illimitée dans les deux sens) à cette base et détermine les transformations de propriétés qui en sont la conséquence.

§ 2. — QUESTIONS RELATIVES AUX HAUTEURS.

Quadruple hyperboloïdique des hauteurs.

Théorème. — *Les hauteurs d'un tétraèdre* $S_1 S_2 S_3 S_4$ *sont, en général, les génératrices d'un hyperboloïde équilatère, dont le centre est symétrique du centre* O *de la sphère circonscrite par rapport au barycentre* G (Neub.).

La hauteur issue du sommet S_1 a pour équation :

$$\frac{P_2}{s_2 \cos A_{34}} = \frac{P_3}{s_3 \cos A_{24}} = \frac{P_4}{s_4 \cos A_{23}}.$$

Si l'on pose

$$\cos A_{12} \cos A_{34} = L_2, \quad \cos A_{13} \cos A_{24} = L_3, \quad \cos A_{14} \cos A_{23} = L_4,$$
$$L_3 - L_4 = \lambda_2, \quad L_4 - L_2 = \lambda_3, \quad L_2 - L_3 = \lambda_4,$$

l'équation de l'*hyperboloïde des hauteurs* est

$$(H_h) \qquad \Sigma \lambda_2 \left(\frac{\cos A_{12}}{s_1 s_2} P_1 P_2 + \frac{\cos A_{34}}{s_3 s_4} P_3 P_4 \right) = 0.$$

Le centre de cet hyperboloïde (centre du quadruple des hauteurs) a pour coordonnées les expressions obtenues en remplaçant respectivement, dans celles (o_1, o_2, o_3, o_4) du centre de la sphère circonscrite,

$$a_{12}^2 \text{ par } \lambda_2 \frac{\cos A_{12}}{s_1 s_2}, \qquad a_{34}^2 \text{ par } \lambda_2 \frac{\cos A_{34}}{s_3 s_4}, \qquad \dots.$$

Le centre corrélatif est au point remarquable

$$\lambda_2 \cos A_{12} + \lambda_3 \cos A_{13} + \lambda_4 \cos A_{14}, \quad \dots.$$

Si l'on a $L_2 = L_3 = L_4$, l'équation (H_h) est identique : les hauteurs sont concourantes, et le tétraèdre est dit *orthocentrique*. C'est un cas particulier important que nous allons d'abord examiner.

Tétraèdre orthocentrique.

En posant $L_2 = L_3 = L_4 = L$, les coordonnées de l'*orthocentre* H du tétraèdre orthocentrique ($S_1 S_2 S_3 S_4$) peuvent s'écrire :

$$\frac{s_1}{\cos A_{14}}, \quad \frac{s_2}{\cos A_{24}}, \quad \frac{s_3}{\cos A_{34}}, \quad \frac{s_4 L}{\cos A_{14} \cos A_{24} \cos A_{34}},$$

ainsi que sous trois autres formes.

Parmi les propriétés de l'orthocentre, nous citerons les suivantes (Neub.) :

1° *Dans tout tétraèdre orthocentrique, les milieux des arêtes* [1] *et les pieds des perpendiculaires communes aux arêtes opposées sont douze points d'une même sphère ayant son centre au barycentre* G (PREMIÈRE SPHÈRE DES DOUZE POINTS).

2° *Dans tout tétraèdre orthocentrique, les barycentres des faces, leurs orthocentres et les points qui divisent dans le rapport de* 2 *à* 1 *les segments des hauteurs compris entre les sommets et l'orthocentre* H *du tétraèdre sont douze points situés sur une même sphère dont le centre* O' *divise la distance* HO *dans le rapport de* 1 *à* 2 (DEUXIÈME SPHÈRE DES DOUZE POINTS).

Nous bornerons nos observations à celles qui sont nécessaires pour un premier examen des questions suivantes : Peut-on rechercher, avec probabilité de succès, d'autres propriétés du tétraèdre orthocentrique ? Le centre H du quadruple des hauteurs d'un tétraèdre général conserve-t-il certaines de ces propriétés ? Quelles peuvent être les conséquences de ces recherches ?

Restons d'abord dans le cas du tétraèdre orthocentrique.

L'équation de la *première* sphère des douze points peut s'obtenir en la considérant comme déterminée par les milieux de deux arêtes opposées et les pieds de leur perpendiculaire commune. En établissant l'équation de la *même* sphère pour les deux autres couples d'arêtes opposées et exprimant que les trois équations sont identiques, on retrouvera d'abord les conditions $L_2 = L_3 = L_4$, et peut-être pourra-t-on déduire de cette identification des relations entre les faces, les dièdres, les arêtes. Une question importante à examiner est celle de l'intersection de la première sphère des douze points et du troisième ellipsoïde de Steiner.

La *seconde* sphère des douze points n'est autre que la sphère pédale définie au § 1. On possède donc son équation, en fonction du sextuple des arêtes. Mais il sera utile d'établir l'équation de cette sphère comme déterminée soit par les orthocentres des faces, soit

---

[1] Nous employons ici l'expression *milieu* parce que nous traitons exclusivement une question métrique et ponctuelle ; l'expression *point moyen* du système (S_1, S_2) devra lui être substituée si l'on veut trouver un énoncé corrélatif.

par les points des segments des hauteurs, soit par d'autres combinaisons faciles à apercevoir. Car, dans ces équations, figureront les faces et les dièdres, et de nouvelles formules pourront résulter de l'identification des équations. Il y aura lieu d'examiner l'intersection de cette sphère avec le deuxième ellipsoïde de Steiner, comme complément de l'étude que l'on aura pu faire de l'intersection de la sphère circonscrite et du premier ellipsoïde.

A cause du dédoublement des sommets d'un triangle en sommets et arêtes, des côtés en arêtes et faces, on peut dire que les deux sphères des douze points correspondent *également* au cercle d'Euler. Il est très probable [1] que l'une d'elles est tangente aux sphères tangentes au tétraèdre. En outre, à cause de la division des sphères tangentes en (I, I_1, I_2, I_3, I_4) et (J_1, J_2, J_3), on peut se demander si les cinq premières sphères ne seraient pas tangentes à la sphère pédale (ou de faces), les trois dernières l'étant à la première sphère (d'arêtes). C'est une question à éclaircir.

Dans un triangle $S_1S_2S_3$ dont H est l'orthocentre, les quatre cercles ($S_1S_2S_3$), (S_2S_3H), (S_3S_1H), (S_1S_2H) sont égaux; les trois derniers passent respectivement par les adjoints du barycentre G'_1, G'_2, G'_3, ce qui démontre leur égalité, les triangles $S_1S_2S_3$, $S_2S_3G'_1$, $S_3S_1G'_2$, $S_1S_2G'_3$ étant égaux. Il est naturel de rechercher, pour un tétraèdre orthocentrique, si les cinq sphères

$$(S_1S_2S_3S_4),\quad (S_2S_3S_4H),\quad \ldots,\quad (S_1S_2S_3H),$$

ne sont pas égales. M. Laisant a démontré, par la méthode des équipollences, que cette propriété n'existe pas.

Mais on peut prendre la question à un autre point de vue. Si, dans le triangle, on considère les trois cercles égaux ($S_2S_3G'_1$), ($S_3S_1G'_2$), ($S_1S_2G'_3$), et que l'on cherche leur centre radical, on trouvera le point (commun) H. De même, si, dans un tétraèdre orthocentrique, on considère les quatre sphères ($S_2S_3S_4G'_1$), ..., ($S_1S_2S_3G'_4$), égales, puisque les tétraèdres sont égaux, et que l'on cherche leur centre radical, on trouvera l'orthocentre H, point extérieur; il n'y a donc pas défaut complet de correspondance.

---

[1] Notre attention a été appelée sur cette probabilité de propriétés analogues à celles découvertes par Feuerbach, par M. Caronnet, professeur au Collège Chaptal.

Tétraèdre général.

Si nous considérons maintenant le tétraèdre général, nous constaterons d'abord que le centre du quadruple des hauteurs étant symétrique de G par rapport à O, le centre O′ de la sphère pédale divise la distance HO dans le rapport de 1 à 2.

Dans un triangle $S_1 S_2 S_3$, l'orthocentre H est le complémentaire du centre du cercle de Longchamps. Il y a évidemment au moins une sphère à étudier : c'est celle qui coupe orthogonalement les quatre sphères décrites de S_1, S_2, S_3, S_4 comme centres avec $\sqrt{s_1}$, $\sqrt{s_2}$, $\sqrt{s_3}$, $\sqrt{s_4}$ pour rayons. On peut même envisager la famille de sphères longchampsiennes, remplissant les mêmes conditions de centres et d'orthogonalité avec des rayons donnés par

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_3}{s_3} = \frac{r_4}{s_4} = \frac{1}{\lambda},$$

λ étant une longueur variable. L'une de ces sphères a-t-elle son centre au point O″ anti-complémentaire de H? C'est un fait à vérifier, mais qui est probable, la droite H — O′ — G — O ayant déjà un système de points complémentaires constant.

Dans le tétraèdre général, il n'y a pas de sphères des douze points, mais, d'une part, il reste une sphère pédale σ_p et, de l'autre, on peut considérer trois sphères (σ_1, σ_2, σ_3) déterminées chacune par les milieux de deux arêtes opposées et les pieds de leur perpendiculaire commune. Il y aurait lieu de rechercher si les trois dernières sphères n'ont pas un axe radical remarquable, et si le centre radical des quatre sphères σ n'est pas un point remarquable (peut-être le point H).

Qu'un tétraèdre soit orthocentrique ou non, les quatre sphères ($S_2 S_3 S_4 G'_1$), ..., ($S_1 S_2 S_3 G'_4$) sont égales entre elles comme circonscrites à des tétraèdres égaux. Ces quatre sphères ont un centre radical non encore déterminé; mais le seul point que la logique indique est le point H.

Puisqu'aux sommets du triangle correspondent aussi bien (et peut-être mieux, *voir* § 3) les arêtes que les sommets du tétraèdre, il y aurait lieu d'étudier, pour le tétraèdre orthocentrique d'abord, puis pour le tétraèdre général, les deux sextuples de cylindres de

révolution ayant les arêtes pour axes et dont les rayons sont égaux soit aux longueurs de ces arêtes, soit aux longueurs des arêtes opposées. L'orthocentre (ou le centre du quadruple) a-t-il une relation avec ces sextuples de cylindres? C'est une question qu'on ne peut que poser.

§ 3. — DÉDOUBLEMENT D'UN TRIÈDRE. — QUADRUPLES DE PLANS.

Dédoublement d'un trièdre.

La question qu'il importerait peut-être le plus d'élucider, pour les études métriques relatives au tétraèdre, est celle du *dédoublement d'un trièdre* en *trièdre-faces* et *trièdre-arêtes*.

Nous avons demandé à ce sujet des renseignements par l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (août 1897, question 1114). On nous a répondu en nous citant le *trièdre supplémentaire* classique, dont le sinus est égal à celui du *trièdre-arêtes*. Ce fait nous était connu; mais, dans le plan, deux angles supplémentaires ont *même sinus,* et ce ne sont pas pour cela les *mêmes* angles. La réponse n'est donc pas celle que comportait notre question, que nous reproduisons en la précisant :

« Un trièdre *donné,* considéré *indépendamment de toute association* avec un autre trièdre, se dédouble, ou, en d'autres termes, peut être envisagé à deux points de vue bien distincts. Pour le sommet S_1 (A_{12}, A_{13}, A_{14} étant les dièdres, a_{12}, a_{13}, a_{14} les longueurs d'arêtes dans le tétraèdre $S_1S_2S_3S_4$), en désignant spécialement par S_1 le trièdre-faces constitué par les angles

$$\widehat{S_3S_1S_4} = \alpha_{34}, \qquad \widehat{S_4S_1S_2} = \alpha_{42}, \qquad \widehat{S_2S_1S_3} = \alpha_{23},$$

et par Σ_1 le trièdre-arêtes constitué par les dièdres A_{12}, A_{13}, A_{14}, nous avons établi les formules [1]

$$\sin^2 S_1 = 1 + 2\cos\alpha_{34}\cos\alpha_{42}\cos\alpha_{23} - \cos^2\alpha_{34} - \cos^2\alpha_{42} - \cos^2\alpha_{23},$$
$$\sin^2 \Sigma_1 = 1 - 2\cos A_{12}\cos A_{13}\cos A_{14} - \cos^2 A_{12} - \cos^2 A_{13} - \cos^2 A_{14},$$

---

[1] La formule $\sin^2 S_1$ est connue comme donnant le sinus du trièdre; mais on n'a pas signalé qu'elle ne répondait qu'à une partie de la question La formule $\sin^2 \Sigma_1$ est connue comme donnant la *valeur* du sinus du *trièdre supplémentaire* de S_1, mais nullement comme donnant un des sinus de ce trièdre même.

25209 Paris. — Imp. de GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.